МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра физики

Методические указания для проведений практических занятий по дисциплине

"Физика"

семестр 3 (электромагнетизм)

Для направлений подготовки:

01.03.02, 01.03.03, 04.03.01, 06.03.01, 08.03.01, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.04, 13.03.02, 15.03.01, 15.03.02, 15.03.04, 15.03.05, 15.03.06, 19.03.01, 20.03.01, 21.03.02, 22.03.01, 23.03.01, 23.03.02, 23.03.03, 24.03.02, 24.03.03, 27.03.01, 27.03.02, 29.03.03, 49.03.01, 10.05.03, 11.05.01, 15.05.01, 17.05.01, 17.05.02, 21.05.04, 23.05.01, 24.05.01, 24.05.02, 24.05.06

Методические указания подготовлены
проф. Ю.Н. Колмаковым, доц. С.Е.Кажарской, доц. Е.В.Якуновой

Тула - 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с рабочей программой в течение семестра студент должен выполнить две контрольные работы, включающие 5-6 задач в каждой работе по общим для разных направлений подготовки темам. Образцы решения таких задач, рекомендуемые для проведения практических занятий по физике, приводятся ниже. Выбор тем практических занятий и разделов задач контрольных работ соответствует конкретной рабочей программе направления (специальности) подготовки.

Для самостоятельной подготовки к контрольным работам примеры практических задач приведены также в пособии:
--- Колмаков Ю. Н., Кажарская С.Е. Физика. Электромагнетизм: руководство к проведению самостоятельной работы студентов: учебн. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2017.— 156 с. .— ISBN 978–5–7679–33915–2.

Примерное содержание тем практических занятий в соответствии с рабочими программами приведено в следующей таблице:

Семестр 3	
№ занятия	Тема практического занятия
1	Принцип суперпозиции и расчет электростатического поля для системы точечных зарядов и для заряда, распределенного непрерывно. Вычисление напряженности и потенциала электростатического поля.
2	Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей. Связь напряженности и потенциала. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле. Энергия системы заряженных частиц и электрического поля. Емкость и энергия заряженных конденсаторов.
3	Законы постоянного тока. Вычисление электрического заряда, протекающего по цепи и выделяющегося в электрической цепи джоулевого тепла. Закон Джоуля-Ленца. Квазистационарные токи (задачи с электрическими цепями, содержащими конденсатор).
4	Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. Использование закона Ома в локальной форме.
5	Расчет магнитных полей с помощью закона Био-Савара и с помощью теоремы о циркуляции.
6	Силы Лоренца и Ампера. Движение заряженной частицы в стационарных электрическом и магнитном полях. Силы, действующие на электрический и магнитный диполь (контур с током).
7	Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Явления самоиндукции и взаимной индукции. Вычисление индуктивности. Энергия магнитного поля.
8	Собственные электрические колебания в цепях. Электрический колебательный контур и его параметры. Вынужденные электрические колебания.

Семестр 3

19. Расчет электростатических полей точечных зарядов

Если задана система двух или нескольких **точечных** электрических зарядов, то на расстояниях r_1 и r_2 от зарядов их потенциалы складываются с учетом знака заряда, $\boxed{\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} + \dfrac{-|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}}$. Напряженности складываются векторно, $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2}$, где величины векторов (поля точечных зарядов) $\boxed{E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}}$, $\boxed{E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}}$. Надо помнить, что вектор

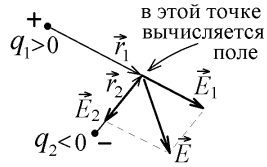


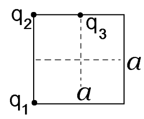
Рис.2.1

$\vec{E}_1$ поля положительного заряда $+q_1$ направлен от заряда, а вектор $\vec{E}_2$ поля отрицательного заряда $-q_2$ направлен к заряду, как показано на рис.2.1 (линии $\vec{E}$ начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность). В этих формулах $\varepsilon_0 = 8,85\cdot10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная, $\varepsilon-$ диэлектрическая постоянная среды, в которой находятся заряды (для воздуха $\varepsilon \cong 1$) Постоянная $1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot10^9$ м/Ф.

На любой точечный заряд q, внесенный в это поле, будет действовать сила Кулона, равная $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$, а энергия внесенного заряда равна $\boxed{W = q\varphi}$.

Пример решения задач:

19.1. Точечные заряды q_1 = +5 мкКл и q_2 = = +1 мкКл находятся в вершинах квадрата со стороной a = = 3 м, а заряд q_3 = +2 мкКл – в середине его стороны (см.рисунок). Найти а) величину кулоновской силы, действующей на заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2; б) угол между вектором этой силы и стороной квадрата; в) энергию заряда q_3. Как изменятся результаты, если заряд q_1 поменяет знак?



Решение.

Совет: *Аккуратно делайте рисунок, отмечая на нем заданные в условии углы и направления векторов. Правильно сделанный рисунок – это 30-50% успешного решения задачи.*

Как видно из рис.2.2, величины напряженностей $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC^2}$; $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot BC^2}$, где $BC = \dfrac{a}{2}$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}a/2$. Проекции векторов на оси x и y равны $E_{1x} = E_1\cos\beta$; $E_{1y} = E_1\sin\beta$; $E_{2x} = E_2$; $E_{2y} = 0$. Из прямоугольного треугольника ABC следует, что $\cos\beta = BC/AC = 1/\sqrt{5}$; $\sin\beta = AB/AC = 2/\sqrt{5}$.

Проекции результирующего вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ в точке C равны

$E_x = E_{1x} + E_{2x} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_1}{5a^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_2}{a^2}$; $E_y = E_{1y} + E_{2y} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_1}{5a^2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Сила Кулона, действующая на заряд q_3 равна $F = q_3E = q_3\sqrt{E_x^2 + E_y^2} =$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4q_3}{a^2}\sqrt{\left(\frac{q_1}{5\sqrt{5}} + q_2\right)^2 + \left(\frac{2q_2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 9\cdot10^9\cdot\frac{4\cdot2\cdot10^{-6}}{3^2}\sqrt{\left(\frac{5}{5\sqrt{5}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot10^{-6} = 0,0136 \text{ Н}.$$

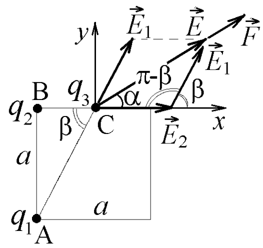


Рис.2.2

Совет: *Чтобы не запутаться в вычислениях, все величины при подстановке переводите в систему СИ, и выносите общие множители и степени, как это сделано выше.*

Угол α между направлением вектора силы $\vec{F}$ (или вектора $\vec{E}$) и осью x можно найти из соотношения $\operatorname{tg}\alpha = E_y/E_x = 2q_1/\left(q_1 + 5\sqrt{5}q_2\right) = 0,0856$, откуда $\alpha = 4,89^{\circ}$.

Совет: *Складывать векторы намного проще, не вычисляя их проекции на оси координат, а используя теорему косинусов: если известны две стороны a и b треугольника и угол θ между ними (рис.2.3), то противоположная сторона равна* $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$.

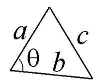


Рис.2.3

Из рис.2.2 видно, что векторы $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}$ образуют треугольник с углом $\pi - \beta$. Поэтому величина результирующей напряженности сразу следует из теоремы косинусов, где величины напряженностей каждого из зарядов $E_1 = \dfrac{4q_1}{4\pi\varepsilon_0\cdot5a^2} = 4000$ В/м, $E_2 = \dfrac{4q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot a^2} = 4000$ В/м. $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(\pi - \beta)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\beta}$ и $F = q_3E = 13,6$ мН.

Результирующий потенциал зарядов найти много проще, так как он будет суммой скалярных, а не векторных функций:
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\cdot AC} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot BC} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{2}{a}\left(\dfrac{q_1}{\sqrt{5}} + q_2\right) = 1,94\cdot10^4$ В.

Энергия заряда q_3 в электростатическом поле зарядов q_1 и q_2 будет равна $W = q_3\varphi = q_3(\varphi_1 + \varphi_2) = 0,0388$ Дж.

Внимательно следите за знаками зарядов в условиях!

Если заряд q_1 *изменит знак, то вектор* $\vec{E}_1$ *поменяет направление (рис.2.4). Тогда по теореме косинусов* $F = q_3 E = q_3\sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\beta} = 8{,}41$ мН . *Потенциал заряда* q_1 *изменит знак:*

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-|q_1|}{AC} + \frac{q_2}{BC}\right) = -7{,}42\cdot 10^3 \text{ В} \quad \text{и } W = q_3\varphi = -0{,}0148 \text{ Дж}.$$

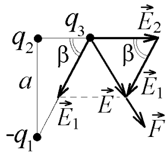
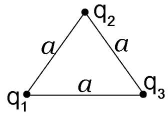


Рис.2.4

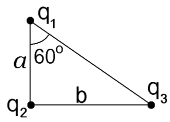
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

19.2. Имеющие разные знаки точечные заряды $q_1 = q_3 = 2$ мкКл и $q_2 = -1$ мкКл находятся в вершинах равностороннего треугольника. На заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2 действует электрическая сила величиной $F = 0{,}01$ Н. Найти длину a стороны треугольника.



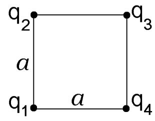
Ответ: 1,77 м.

19.3. Точечные заряды одного знака $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл и q_3 находятся в вершинах прямоугольного треугольника с углом 60° и с прилежащим катетом $a = 1$ м. Определить величину заряда q_3, если величина электрической силы, действующей на него со стороны двух других зарядов q_1 и q_2, равна $F = 6$ мН. Определить величину энергии заряда q_3.



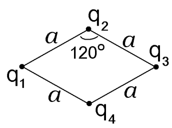
Ответ: 0,747 мкКл; 11,1 мВ.

19.4. Точечные заряды разного знака q_1, q_2, q_3 и q_4 находятся в вершинах квадрата со стороной a = = 2 м. Определить величину положительного заряда q_1, если модуль электрической силы, действующей на него со стороны трёх других зарядов q_2, q_3. и q_4., равен $F = 0{,}2$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2, q_3 и q_4 в точке, где находится заряд q_1. Учесть, что $q_2 = q_4 = -2$ мкКл, $q_3 = +6$ мкКл.



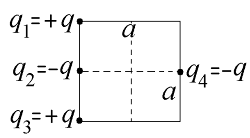
Ответ: 0,518 мкКл, 1092 В.

19.5. Точечные заряды разного знака $q_1 = q_3 = +3$ мкКл, $q_2 = q_4 = -2$ мкКл находятся в вершинах ромба с углом 120° и с длиной каждой из сторон $a = 1$ м. Найти величину электрической силы, действующей на заряд q_3 со стороны трёх других зарядов q_1, q_2. и q_4. Найти энергию заряда q_3 в поле трех остальных зарядов.



Ответ: 66,5 мН, –0,0145 Дж.

19.6. Точечные заряды q_1, q_2, q_3. и q_4. имеющие одинаковую величину и разный знак, расположены в двух вершинах и в серединах двух сторон квадрата с длиной стороны a =3 м, как показано на рисунке. Определить величину заряда q_1, если модуль электрической силы, действующей на заряд q_4 со стороны трёх зарядов q_1, q_2. и q_3. равен $F = 1$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2, q_3 и q_4. в точке расположения заряда q_1.



Ответ: 1,523 мкКл, 8,66 кВ.

20. Расчет электростатических полей распределенных зарядов

Если заряд распределен непрерывно по объему с плотностью ρ, то его можно разбить на крошечные участки dV , заряды которых можно считать **точечными** $dq = \rho dV$ (рис.2.5). Созданные ими напряженности $d\vec{E}$ и потенциалы $d\varphi$ суммируются. Для бесконечно малых величин такая сумма превращается в интеграл: $\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

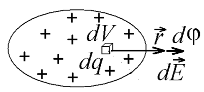


Рис.2.5

Чтобы избежать интегрирования по объему, в задачах контрольной работы рассматривается заряд, распределенный вдоль прямых линий или окружностей с линейной плотностью ρ [Кл/м]. На бесконечно малом участке линии длиной dl находится заряд $\boxed{dq = \rho dl}$, создающий в вакууме на удалении r потенциал $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ и напряженность $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (рис.2.6). Интегрировать надо по всем участкам, на которых находится ненулевой заряд $\rho \neq 0$, причем векторы $d\vec{E}$ надо складывать с учетом направления.

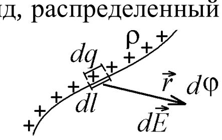
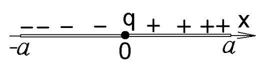


Рис.2.6

Примеры решения задач:

20.1. Электрический заряд распределен по очень тонкому стержню длины $2a = 1$ м, вытянутому вдоль оси x Линейная плотность кэтого заряда меняется с координатой x по степенному закону



$$\rho = \begin{cases} \rho_0\cdot(x/a)^3 & \text{при } -a \le x \le a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases}$$

где $\rho_0 = 4$ мкКл/м. В центре стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён точечный заряд $q = 3$ мкКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд стержня действует на заряд q. Найти потенциал, который заряд на стержне создает в точке 0.

Решение.

Положительный заряд $dq = \rho(x)dx$, находящийся на расстоянии x справа от точки 0, создает в этой точке напряженность $d\vec{E}_+$, направленную от заряда против оси x (рис.2.7). Так

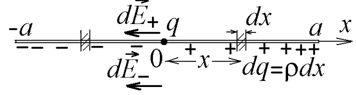


Рис.2.7

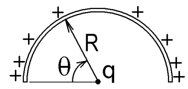
как по условию положительный и отрицательный заряд распределены симметрично, то ту же по величине напряженность $d\vec{E}_-$, направленную в ту же сторону, создает симметрично расположенный отрицательный заряд $-|dq|$ слева от точки 0.

Совет: *Используйте условия симметрии в распределении заряда. Достаточно вычислить поле заряда только одного знака.*
Положительный и отрицательный заряды создадут в точке 0 одинаковые поля:

$E_- = E_+ = \int dE_+ = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \left(\rho_0 \frac{x^3}{a^3}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{a^3}\int_0^a x dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_0}{2a}$. Поэтому суммарная напряженность поля, созданного зарядом на стержне в точке 0 равна $\vec{E} = 2\vec{E}_+$, а проекция силы, действующей на заряд *q*, $F_x = qE_x = \rho_0 q/(4\pi\varepsilon_0 a) = -0,216$ Н.

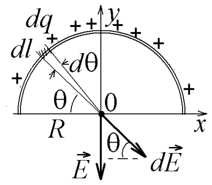
Нетрудно сообразить, что потенциалы симметрично расположенных положительного и отрицательного зарядов должны компенсировать друг друга, $\varphi_+ = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{\rho dx}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{a^3}\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_0}{3} = -\varphi_-$. Суммарный потенциал в точке 0 равен нулю.

20.2. Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса $R = 50$ см неравномерно с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \sin^2\theta$, где $\rho_0 = 7{,}08$ мкКл/м, а угол θ указан на рисунке. Найти величину электрической силы, с которой этот заряд действует на другой точечный заряд $q = 6$ мкКл, находящийся в центре полукольца. Найти потенциал, который заряд на полукольце создает в его центре.



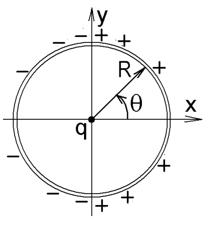
Решение.

При решении подобных задач на полукольце выделяют крошечную дугу длины $dl = Rd\theta$, опирающуюся на бесконечно малый угол $d\theta$ (рис.1.8). На этом участке находится точечный заряд $dq = \rho dl$, создающий в центре 0 полукольца напряженность $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. В силу симметрии распределения заряда слева и справа от вертикальной оси *y*, суммарная напряженность $\vec{E}$ направлена против оси *y*, т.е. надо суммировать проекции на эту ось: $E = \int dE \sin\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\theta)\cdot Rd\theta}{R^2}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^\pi \rho_0 \sin^2\theta\cdot\sin\theta d\theta$.



Совет: *При решении подобных задач часто встречаются интегралы вида* $\int f(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ *или* $\int f(\sin\theta)\cos\theta d\theta$, *которые легко привести к простому виду заменой переменной* $z = \cos\theta$, $\sin\theta d\theta = -dz$ или $z = \sin\theta$, $\cos\theta d\theta = dz$. *При этом* $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Делая замену переменной $z = \cos\theta$ в полученном выше интеграле и меняя местами пределы интегрирования, чтобы убрать знак "–", получаем $E = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-1}^{1}(1 - z^2)dz = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\rho_0}{3R}$, откуда $F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q\rho_0}{3R} = 0{,}288$ Н – это сила, действующая на заряд *q* в точке 0. Потенциал, созданный зарядом полукольца в его центре, вычисляется интегрированием. Так как $\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}$, то $\varphi_0 = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\cdot Rd\theta}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^\pi \rho_0 \sin^2\theta d\theta = \frac{\rho_0}{8\varepsilon_0 R} = 200$ кВ



20.3. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса $R = 60$ см так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0/\cos\theta$, где $\rho_0 = 1{,}18$ мкКл/м. В центре кольца помещён точечный электрический заряд *q*, на который заряд кольца действует с силой $F = 1$ Н. Найти величину заряда *q*.

Решение.

Выделяем на кольце крошечный участок дуги $dl = Rd\theta$ с точечным зарядом $dq = \rho dl = \rho Rd\theta$, который создает в центре 0 кольца напряженность $d\vec{E}$ (рис.2.9). Из-за симметрии в распределении заряда и положительный заряд на правой половине кольца, и отрицательный заряд на левой половине создают в точке 0 одинаковые напряженности $\vec{E}_+ = \vec{E}_-$, направленные против оси *x*. Их сумма (сумма проекций $d\vec{E}$ на ось *x*) имеет величину

$$E = E_+ + E_- = 2E_+ = 2\int dE\cdot\cos\theta = 2\int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = 2\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2} \frac{\rho Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{2\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 R}.$$

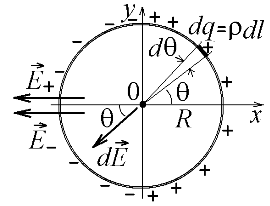


Рис.2.9

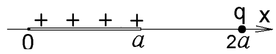
Величина силы, действующей на заряд *q* в точке 0 $F = qE = \frac{q\rho_0}{2\varepsilon_0 R}$, откуда $q = \frac{2\varepsilon_0 RF}{\rho_0} = 9$ мкКл.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

20.4. По тонкому стержню длины a = 2 м, направленному вдоль оси x, неравномерно распределен отрицательный электрический заряд, линейная плотность которого меняется с координатой x по закону $\rho = \rho_0 \cdot (x/a)^3$, где ρ_0 = -2 мкКл/м. На левом краю стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён положительный точечный заряд q = +2 мкКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд на стержне действует на заряд q, а также потенциал, созданный зарядом на стержне в точке 0.

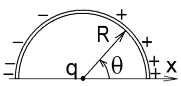
Ответ: +9 мН, –6 кВ.

20.5. Тонкий стержень длины a направлен вдоль оси x. По стержню равномерно с линейной плотностью ρ = 0,2 мкКл/м распределен положительный электрический заряд. На расстоянии a от правого конца стержня на оси x находится точечный заряд q = 0,5 мкКл того же знака (см. рисунок). Заряд на стержне действует на заряд q с силой
F = 0,9 Н. Найти длину a стержня, а также энергию заряда q.



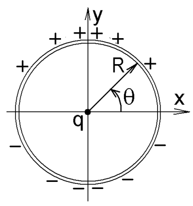
Ответ: 0,5 м, 0,624 Дж.

20.6. Положительный точечный заряд q = 7 мкКл находится в центре тонкого полукольца, по которому неравномерно, с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \cdot \cos\theta$, где ρ_0 = 1,77 мкКл/м, распределен другой электрический заряд (угол θ указан на рисунке). Найти радиус R полукольца, если заряд на нём действует на заряд q с силой, величина проекции которой на ось x равна $|F_x|$ = 0,5 Н.



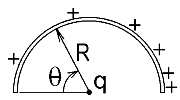
Ответ: 0,35 м.

20.7. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса R = 40 см так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0 \cdot \sin\theta$, где ρ_0 = +2,95 мкКл/м. В центре кольца помещён другой точечный заряд q = +24 мкКл. Найти величину электрической силы, с которой заряд на кольце действует на заряд q.



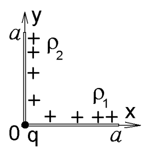
Ответ: 5 Н.

20.8. Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса R = 50 см с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\theta/\pi\right)^3$, где ρ_0 = 7,08 мкКл/м, а угол θ меняется в пределах $0 \le \theta \le \pi$. Найти энергию точечного заряда q = 6 мкКл, находящийся в центре полукольца.



Ответ: 0,3 Дж.

20.9. Два очень тонких стержня длиной a = 20 см каждый направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей x и y и соединяются в начале координат 0, в котором закреплён точечный заряд q = 2 мкКл (см. рисунок). По стержням неравномерно распределены электрические заряды, линейные плотности которых зависят от координат x и y соответственно: $\rho_1 = \rho_0 \cdot (x/a)^2$, $\rho_2 = \rho_0 \cdot (y/a)^2$, где ρ_0 = 2 мкКл/м. Найти величину электрической силы, действующей на заряд q, а также энергию этого заряда.



Ответ: 0,255 Н, 0,036 Дж.

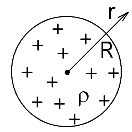
21. Использование теоремы Гаусса для расчета электрических полей

В том случае, когда можно выбрать замкнутую поверхность, которую линии напряженности $\vec{E}$ или линии электрической индукции $\vec{D}$ пересекают под прямым углом, для расчета поля удобно использовать теорему Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов $\sum q$ (с учетом их знака!), находящихся **внутри этой поверхности**, деленной на $\varepsilon\varepsilon_0$: $\boxed{\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \sum q/\varepsilon\varepsilon_0}$. Для вектора $\vec{D}$ такая же теорема имеет вид $\boxed{\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \sum q}$.

Совет: *Используйте теорему Гаусса в том случае, когда заряд распределен симметрично по шару, по длинному цилиндру, по нити или равномерно распределен по плоскости или плоскому слою.*

Примеры решения задач:

21.1. По шару радиуса R равномерно с плотностью ρ распределен электрический заряд. На расстояниях r_1 = 15 см и r_2 = 60 см от центра шара величина напряжённости электрического поля, созданного этим зарядом, равна, соответственно, E_1 = 24 В/м и E_2 = 12 В/м. Чему равен радиус шара R, если известно, что $r_1 < R < r_2$?



Решение.

Линии $\vec{E}$ начинаются на всех зарядах внутри шара и направлены радиально (рис.2.10). Охватим шар сферической замкнутой поверхностью А с радиусом $r > R$. Если вектор $\vec{E}$ составляет угол θ с вектором элементарной площадки $d\vec{S}$, то $\vec{E}d\vec{S} = E\cos\theta dS$. В нашей задаче элементы площади $d\vec{S}$ направлены параллельно линиям $\vec{E}$, а величина E в силу симметрии одинакова во всех точках сферы. Поэтому поток $\vec{E}$ через замкнутую сферу равен произведению E на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$, которую линии E пересекают нормально: $\oint \vec{E}d\vec{S} = E\cos 0^0 \oint dS = E \cdot 4\pi r^2 = \sum q/\varepsilon_0$. Сумма зарядов внутри сферы равна заряду шара $\sum q = \rho \cdot V_{\text{шара}} = \rho \cdot 4\pi R^3 / 3$, и вне шара напряженность $E_{\text{вне}} = \rho R^3 / 3\varepsilon_0 r^2$ совпадает с напряженностью поля заряда, собранного в центр шара.

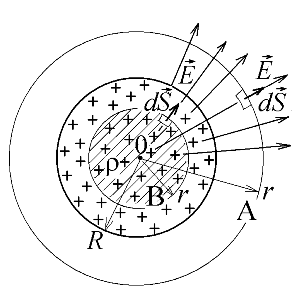


Рис.2.10

Вторую сферическую поверхность В с радиусом $r < R$ выберем внутри шара. Внутри неё находится заряд заштрихованного на рис.2.10 шара радиуса r: $\sum q = \rho \cdot 4\pi r^3/3$. Применение теоремы Гаусса дает $E \cdot 4\pi r^2 = \sum q/\varepsilon_0 = \rho \cdot 4\pi r^3 / 3\varepsilon_0$. Поле внутри шара растет пропорционально расстоянию r: $E_{\text{внутри}} = \rho r / 3\varepsilon_0$ (рис.2.11).

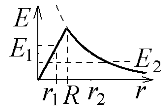


Рис.2.11

Согласно условию, на расстояниях r_1 и r_2 величины напряженностей различаются в два раза (рис.2.11): $E_1 = \rho r_1 / 3\varepsilon_0 = 2E_2 = 2\rho R^3 / 3\varepsilon_0 r_2^2$, откуда $R = \sqrt[3]{r_1 r_2^2 / 2} = 30$ см.

Совет: *Если плотность заряда является функцией расстояния r, то данное решение не меняется, но сумма зарядов внутри сферы радиуса r вычисляется по формуле* $\sum q = \int \rho(r)\, dV = \int \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$.

21.2. По шару радиуса R = 50 см из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ распределён электрический заряд, причём объёмная плотность такого заряда меняется с расстоянием r от центра шара по закону $\rho = \rho_0 \cdot (r/R)^2$, где ρ_0 = const. На расстоянии r = 5 см от центра заряд создаёт электрическое поле с величиной напряжённости E = 20 В/м. Найти величину ρ_0.

Решение.

Как и в предыдущей задаче, поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую сферическую поверхность радиуса r, находящуюся **внутри** шара, равен $E \cdot 4\pi r^2 = \sum q / \varepsilon_0 \varepsilon$ (надо учесть диэлектрическую проницаемость среды). Объем внутри $V = 4\pi r^3/3$, элемент объема $dV = 4\pi r^2 dr$. Заряд внутри поверхности $\sum q = \int \rho dV = \int_0^r \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0}{R^2} \int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi\rho_0 r^5}{5R^2}$. Так как $\varepsilon = 2$, то $E = \frac{\rho_0 r^3}{10\varepsilon_0 R^2}$ и $\rho_0 = \frac{10\varepsilon_0 \varepsilon R^2 E}{r^3} = 7{,}08$ мкКл/м^3.

21.3. Две очень длинные цилиндрические поверхности с радиусами a = 1 м и b = 5 м с общей осью О ограничивают равномерно заряженный цилиндрический слой. Плотность электрического заряда в нём ρ = 4 мКл/м^3. Найти величину вектора электрической индукции $\boldsymbol{D}$ (вектора смещения) на расстоянии r = 4 м от оси О.

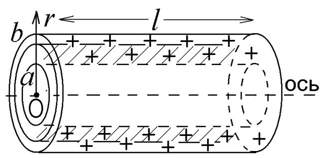


Рис.2.12

Решение.

Рассмотрим вначале равномерно заряженный с плотностью ρ=const сплошной цилиндр. Окружим его соосной цилиндрической поверхностью А длины l и большего радиуса $r > R$. Как и линии $\vec{E}$, линии индукции $\vec{D}$ направлены по радиусам к общей оси 0 и пересекают боковую поверхность $S_{\text{бок}} = 2\pi r l$ нормально (рис.2.13). Внутри этой поверхности находится заряд из вырезанного поверхностью участка заряженного цилиндра $\sum q = \rho \cdot V_{\text{цилиндра}} = \rho \cdot \pi R^2 l$. Согласно теореме Гаусса $\oint \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 2\pi r l = \sum q$. Поэтому вне цилиндра $D_{\text{вне}} = \rho R^2 / 2r$.

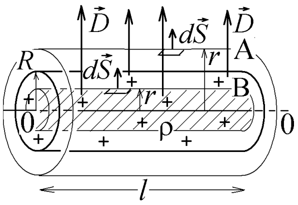
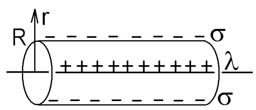


Рис.2.13

Цилиндрическая поверхность В меньшего радиуса $r < R$, охватывает заштрихованный на рис.2.13 участок цилиндра с зарядом $\sum q = \rho \cdot \pi r^2 l$. Теорема Гаусса для этой поверхности дает $D \cdot 2\pi r l = \sum q = \rho \pi r^2 l$ / Поэтому внутри цилиндра $D_{\text{внутри}} = \rho r/2$.

В нашей задаче проводим замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса $r < b$ и длины l внутри цилиндрического слоя. Она охватывает заштрихованный на рис.2.12 участок с объемом $V = \pi r^2 l - \pi a^2 l$, имеющий заряд $\sum q = \rho V$. Теорема Гаусса позволяет просто определить индукцию D на этой поверхности: $D = \frac{\sum q}{2\pi r l} = \rho\left(r^2 - a^2\right) / 2r = 7{,}5$ мКл/м^2.

21.4. Поверхностная плотность электрического заряда, равномерно распределенного по бесконечно длинной цилиндрической поверхности радиуса R = 30 см, равна σ = −2 мкКл/м^2. По её оси протянута нить, равномерно заряженная с линейной плотностью λ = 4 мкКл/м. На каком удалении r от оси напряженность электрического поля, созданного этими зарядами будет равна $E = 1$ кВ/м?

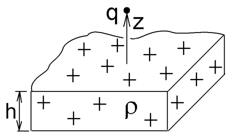


Решение.

Как и на рис.1.13, охватим эту систему зарядов замкнутой цилиндрической поверхностью длины l и радиуса $r > R$. Она охватывает участок цилиндра с зарядом $q_{\text{ц}} = \sigma \cdot 2\pi R l$ и участок нити с зарядом $q_{\text{н}} = \lambda \cdot l$. Линии $\vec{E}$ расходятся вдоль радиусов и перпендикулярны к выбранной поверхности. Согласно теореме Гаусса

$E \cdot 2\pi r l = \sum q / \varepsilon_0 = \left(q_{\text{ц}} + q_{\text{н}}\right)/\varepsilon_0$, откуда $r = \frac{2\pi R\sigma + \lambda}{2\pi\varepsilon_0 E} = 4{,}14$ м.

При $r < R$ поле создает только заряд нити. Одна нить создаёт слишком большое поле $E_{\text{нити}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, не удовлетворяющее условиям задачи.



21.5. На удалении z = 1 м от бесконечного плоского слоя, заряженного равномерно с плотностью заряда ρ = 5 мкКл/м^3, находится точечный заряд q = 4 мкКл. Чему равна толщина слоя h, если он действует на заряд q с электрической силой F = 0,02 Н?

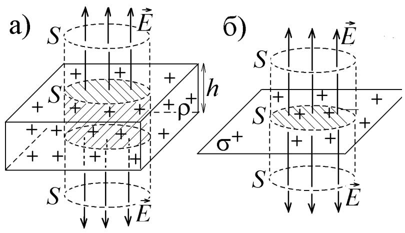


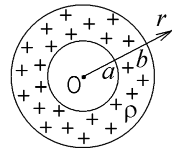
Рис.2.14

Решение.

И в случае равномерно заряженного с плотностью ρ слоя (рис.2.14,а), и в случае равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ плоскости (рис.2.14,б), линии напряженности $\vec{E}$ выходят нормально и пересекают только имеющие площадь S основания цилиндрической замкнутой поверхности, охватывающей заряды на заштрихованных участках. По теореме Гаусса поток $\vec{E}$ через эту поверхность $\oint \vec{E}d\vec{S} = E \cdot 2S = \sum q/\varepsilon_0\varepsilon$. Сумма зарядов на заштрихованных участках $\sum q = \rho \cdot hS$ для слоя и $\sum q = \sigma \cdot S$ для плоскости. Поэтому $E_{\text{слоя}} = \dfrac{\rho h}{2\varepsilon_0\varepsilon}$ (рис.1.14,а) и $E_{\text{плоскости}} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$ (рис.1.14,б).

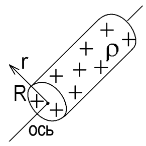
Величина E не зависит от расстояния до бесконечного слоя (или плоскости). Действующая на заряд q сила $F = qE$, и по условиям задачи ($\varepsilon = 1$) толщина слоя $h = 2\varepsilon_0 F/q\rho = 1{,}77$ см.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



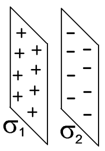
21.6. Заряд с плотностью ρ =3,75 мКл/м^3 равномерно распределён по шаровому слою, ограниченному двумя сферическими поверхностями с общим центром О и с радиусами a и b. Чему равен радиус a, если b = = 9 м, а на расстоянии r = 5 м от центра О величина вектора электрической индукции поля, созданного этим зарядом, равна D = 6,2 мКл/м^2?

Ответ: 1 м.



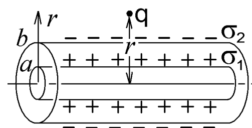
21.7. Очень длинный цилиндр радиуса R = 4 см равномерно с плотностью ρ = const заряжен по объёму. На расстоянии r_1 = 3 см от оси цилиндра напряжённость электрического поля, имеет величину E_1 = 24 В/м, а на расстоянии $r_2 > r_1$ от оси E_2 = 16 В/м. Найти расстояние r_2.

Ответ: 8 см.



21.8. По двум параллельным бесконечным плоскостям равномерно распределены электрические заряды с поверхностными плотностями σ_1 = +8 мкКл/м^2 и σ_2 = –4 мкКл/м^2 разного знака. Во сколько раз величина вектора электрической индукции $\boldsymbol{D}$ между заряженными плоскостями больше величины вектора $\boldsymbol{D}$ слева от обеих плоскостей?

Ответ: в 3 раза.



21.9. Электрический заряд разного знака, равномерно распределён по двум бесконечно длинным цилиндрическим поверхностям с общей осью, которые имеют радиусы a = 5 см и b = = 10 см. Поверхностные плотности таких зарядов σ_1 = –5,9 нКл/м^2 и σ_2 = +4,72 нКл/м^2. Чему равна величина точечного заряда q, находящегося на расстоянии r = 20 см от оси, если со стороны заряженных поверхностей на него действует электрическая сила F = 3 мН?

Ответ: 30 мкКл.

21.10. Электрический заряд распределён в пространстве неравномерно: его плотность изменяется с расстоянием r от центра О по закону: $\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot (R/r)^3 & \text{при } r \geq R; \\ 0 & \text{при } r < R, \end{cases}$ где ρ_0 = 2,36 нКл/м^3; R = 50 см. Найти величину напряжённости электрического поля, созданного этим зарядом на расстоянии r = 1 м от центра О. ε =1.

Ответ: 23,1 В/м.

21.11. Электрический заряд распределён по объёму бесконечно длинного цилиндра радиуса R = 20 см. Плотность заряда меняется с расстоянием r от оси цилиндра по закону $\rho = \rho_0 \cdot (r/R)^2$, где ρ_0 = 8 мКл/м^3. На каком расстоянии r от оси (внутри цилиндра) величина вектора электрической индукции равна D = 3,2 мкКл/м^2?

Ответ: 4 см.

22. Потенциал и энергия электрического поля. Конденсаторы

Совет: *При решении задач проще использовать дифференциальные операторы (производные).* Например, напряженность поля можно определить, зная его потенциал: $\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \equiv -\vec{i}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \vec{j}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \vec{k}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}$.

Зная напряженность, вычисляют плотность заряда, создающего электрическое поле:

$$\boxed{\rho = \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)}.$$

Примеры решения задач:

22.1. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = \varphi_0 \cdot (\sin(\alpha x)+\sin(\beta y)+\sin(\gamma z))$, где $\varphi_0 = 100$ В, $\alpha=\beta=\gamma= \pi/2$ рад/м. Найти плотности ρ электрического заряда в той точке, в которой потенциал поля равен $\varphi = 100$ В, а также величину напряженности в точке $x = y = z = 2$ м. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 1$.

Решение.

Находим проекции вектора $\vec{E}$: $E_x = -\partial\varphi/\partial x = -\alpha\varphi_0 \cos(\alpha x)$;
$E_y = -\partial\varphi/\partial y = -\beta\varphi_0 \cos(\beta y)$; $E_z = -\partial\varphi/\partial z = -\gamma\varphi_0 \cos(\gamma z)$. Плотность заряда пропорциональна дивергенции этого вектора и, так как $\alpha = \beta = \gamma$, во всех точках пропорциональна потенциалу:

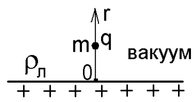
$$\rho = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \varepsilon_0 \left(\alpha^2\varphi_0 \sin(\alpha x) + \beta^2\varphi_0 \sin(\beta y) + \gamma^2\varphi_0 \sin(\gamma z) \right) = \varepsilon_0 \alpha^2 \varphi = 2{,}18 \text{ нКл/м}^3 .$$

Величина напряженности: $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\varphi_0^2 \cos^2 \pi} = \sqrt{3}\alpha\varphi_0 = 544$ В/м.

Работу по перемещению частицы с зарядом q из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле можно вычислить с помощью силы Кулона: $A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 q\vec{E} d\vec{r}$. Но проще найти её с помощью потенциала. Эта работа идет на изменение кинетической энергии заряженной частицы: $\boxed{A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2}}$.

Примеры решения задач:

22.2. Бесконечная прямая нить равномерно заряжена с линейной плотностью $\rho_л = 2$ мкКл/м. Покоившаяся первоначально на расстоянии $r_1 = 1$ м от нити частица с зарядом $q = 5$ мкКл и с массой $m = 0{,}8$ г удаляется от нити под действием электрической силы. На каком расстоянии r_2 от нити частица будет иметь скорость v = 30 м/с?



Решение.

Совет: *Напряженности поля заряженного шара, плоскости, нити можно получить с помощью теоремы Гаусса.*

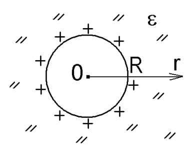
В данной задаче напряженность поля нити $E_{нити} = \frac{\rho_л}{2\pi\varepsilon_0 r}$ (см. задачу 21.4). Поэтому

$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} = A_{1\to 2} = \int\limits_{r_1}^{r_2} qEdr = \frac{q\rho_л}{2\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q\rho_л}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$. Избавиться от логарифма можно вычислив экспоненту от обеих частей уравнения: $\exp\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \equiv \frac{r_2}{r_1} = \exp\left(\frac{\pi\varepsilon_0 m\mathrm{v}^2}{q\rho_л}\right)$, откуда $r_2 = 7{,}40$ м.

Плотность энергии электрического поля (или энергия единицы объема поля) $\boxed{\mathrm{w}_{эл} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2}$. Энергия поля в объеме V вычисляется как $\boxed{W = \int \mathrm{w}_{эл} dV}$.

Примеры решения задач:

22.3. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$ заполняет все пространство вокруг заряженного металлического шара радиуса $R = 3$ см. Чему равна величина заряда q на шаре, если энергия созданного им электрического поля равна $W = 60$ Дж.



Решение.

Внутри металлического шара поле отсутствует, а вне шара совпадает с полем точечного заряда, собранного в центр шара: $E = q/\left(4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2\right)$, при $r \ge R$. Поэтому энергия поля вне шара

$$W = \int \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int\limits_R^\infty \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R}.$$ Отсюда $q = \sqrt{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 WR} = 40$ мкКл.

Совет: *Вместо энергии поля иногда проще найти энергию системы зарядов, создающих данное поле. Эти энергии одинаковы.*

Энергия заряда выражается через емкость проводника C и его потенциал φ: $W = C\varphi^2/2$, где $q = C\varphi$. Емкость уединенного шара $C_{шара} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, его потенциал $\varphi = q/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R)$. Подставляя, получаем уже найденную формулу для энергии W.

Заряд q и емкость C конденсатора связаны с разностью потенциалов $U=\Delta\varphi$ на его обкладках: $\boxed{q=CU}$. Энергия заряженного конденсатора $\boxed{W=\frac{1}{2}qU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$. Емкость вычисляют, с помощью формулы, связывающей напряженность и потенциал поля: $\boxed{\varphi_1-\varphi_2=\int_1^2\vec{E}d\vec{r}}$.

В **плоском конденсаторе** (рис.2.15,а) с площадью пластин S, расстоянием между пластинами d, заполненном диэлектриком с проницаемостью ε, напряженность поля между пластинами $\boxed{E_{\text{конд}}=\sigma/\varepsilon\varepsilon_0}$, где $\sigma=q/S$ - поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов на пластинах $U=\varphi_1-\varphi_2=\int_0^d E_{\text{конд}}dx=\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}d=\frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$. Ёмкость плоского конденсатора $\boxed{C_{\text{плоск}}=\frac{q}{U}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}$.

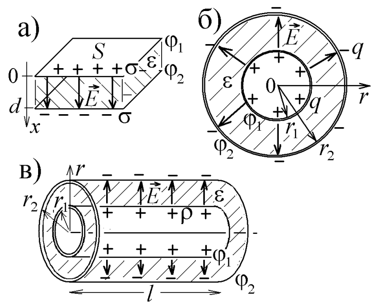


Рис.2.15

В **сферическом конденсаторе** (рис.2.15,б) пространство между металлическими сферами с радиусами r_1 и r_2 заполнено диэлектриком с $\varepsilon=\text{const}$. Поле между ними создано зарядом q на внутренней сфере: $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$. Тогда $U=\varphi_1-\varphi_2=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{q}{C}$. Ёмкость сферического конденсатора $C_{\text{сфер}}=4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 r_2\Big/\left(r_2-r_1\right)$.

Аналогичным вычислением покажите, что емкость **цилиндрического конденсатора** (две соосные цилиндрические поверхности с радиусами r_1 и r_2 большой длины l, рис.2.15,в) равна $C_{\text{цилин}}=\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(r_2/r_1\right)}$.

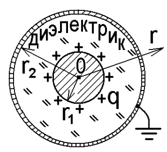
Примеры решения задач:

22.4. Заряженный плоский конденсатор заполнен твердым диэлектриком и имеет энергию W = 0,2 Дж. Расстояние между его пластинами d = 2 мм. Найти силу, притягивающую одну пластину к другой.

Решение.

На пластину с зарядом q может действовать только заряд другой пластины (рис.2.15,а), создающий поле $E=\sigma\big/\left(2\varepsilon\varepsilon_0\right)$ (поле заряженной плоскости). Заряд конденсатора можно выразить через его энергию: $q^2=2CW=2W\varepsilon\varepsilon_0 S/d$. Подставляя этот результат в формулу для силы $F=qE=q\sigma\big/\left(2\varepsilon\varepsilon_0\right)=q^2\big/\left(2\varepsilon\varepsilon_0 S\right)$, получаем $F=W/d=100$ Н.

22.5. Пространство между заряженным металлическим шаром радиуса r_1 = 2 см и металлической заземленной сферой с радиусом r_2 = 4 см заполнено неоднородным диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого меняется с расстоянием r от общего центра О по закону $\varepsilon=\alpha/r$, где α = 6 см. Найти заряд q шара, если энергия такой системы заряженных проводников равна W = 0,2 Дж.



Решение.

На внутренней поверхности заземленной сферы окажется заряд $-q$, на котором будут заканчиваться все силовые линии $\vec{E}$, не проникая в металл. Система будет сферическим конденсатором, для которого разность потенциалов $U=\varphi_1-\varphi_2=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

Его энергия, $W=\frac{qU}{2}=\frac{q^2}{8\pi\alpha\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$, и $q=\sqrt{\frac{8\pi\alpha\varepsilon_0 W}{\ln\left(r_2/r_1\right)}}=1{,}96$ мкКл.

Ёмкость этого конденсатора не совпадает с ёмкостью конденсатора, заполненного однородным диэлектриком.

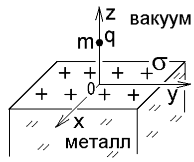
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

22.6. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi=\alpha\cdot xyz$, где α = const. Величина напряженности такого поля в точке с координатами $x_1=y_1=z_1=1$ м равна E_1 = 30 В/м. Найти величину напряжённости этого поля в точке с координатами x_2 = 1 м, y_2 = 2 м, z_2 = 3 м.

Ответ: 121 В/м.

22.7. Потенциал электростатического поля зависит от координат x, y по закону $\varphi=\varphi_0\cdot(\sin(\alpha x)+\cos(\beta y))$, где φ_0 = 100 В, α = 2 рад/м, β = 3 рад/м. Найти величину напряженности поля, а также плотность электрического заряда в точке с координатами $x=y=1$ м.

Ответ: 93,4 В/м, -4,67 нКл/м^3.



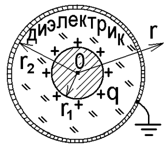
22.8. Частица с зарядом q = 3 мкКл и с массой m = 0,2 г покоилась на расстоянии z_1 = 1 см от очень большой плоской поверхности металла, по которой с поверхностной плотностью σ = 3,54 нКл/м^2 распределен электрический заряд того же знака. Какую скорость приобретёт частица, удалившись на расстояние z_2 = 4 см от поверхности металла под действием электрической силы.

Ответ: 0,6 м/с.

22.9. Заряженный плоский конденсатор, имеющий энергию W = 0,004 Дж, заполнен диэлектриком и отключен от источника напряжения. Чтобы вынуть диэлектрик, надо совершить работу A = 0,003 Дж. Чему равна диэлектрическая проницаемость диэлектрика? *Ответ*: 1,75.

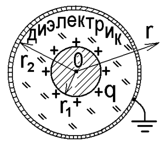
22.10. Расстояние между горизонтально расположенными пластинами плоского воздушного конденсатора d = 1 см. Между пластин неподвижно висит заряженная пылинка с массой m = 0,05 г. Ёмкость конденсатора C = 0,03 мкФ, заряд на его пластинах q = 6 мкКл. Найти величину заряда пылинки. Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: 25 нКл.



22.11. Однородная среда с диэлектрической проницаемостью ε = 4 заполняет пространство между металлическим шаром и заземленной металлической сферой радиуса r_2 = 8 м. На шар помещен заряд q = = 6 мкКл, а потенциал электростатического поля в общем центре О шара и сферы имеет величину φ_0 = = 2,4 кВ. Чему равен радиус r_1 шара?

Ответ: 3,30 м.



22.12. Металлический шар радиуса r_1 = 2 см и заземленная металлическая сфера радиуса r_2 = 3 см имеют общий центр О. Диэлектрическая проницаемость непроводящей среды, заполняющей пространство между шаром и сферой, убывает с расстоянием r от центра О по закону ε = a/r, где a = 4 см. Найти ёмкость такой системы проводников (в пФ).

Ответ: 11,0 пФ

22.13. Металлический шар с зарядом q = 4 мкКл окружен заземленной металлической сферой радиуса r_2 = 5 см. Между ними находится диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого убывает с расстоянием r от общего центра О по закону ε =b/r^3, где b = 150 см^3. Энергия этой системы заряженных проводников равна W = 0,36 Дж. Найти радиус шара r_1.

Ответ: 3,16 см.

23. Законы квазистационарного тока

Ток, протекающий по участку цепи с сопротивлением R, создает на нем падение напряжения $\boxed{U = IR}$. Мощность тока $\boxed{P = UI = I^2R}$, а величина силы тока зависит от величины заряда, протекшего через сечение проводника за единицу времени: $\boxed{I = dq/dt}$.

Совет:

Если ток зависит от времени, не используйте школьные формулы, записанные для постоянного тока!

Величина заряда, протекшего по цепи за время $0 \le t \le \tau$ будет равна $\boxed{q = \int_0^\tau I(t)\,dt}$, а величина выделившегося за это время тепла $\boxed{Q = \int_0^\tau I^2(t) R\,dt}$.

Примеры решения задач:

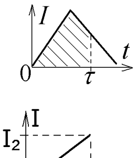
23.1. Ток, текущий по проводнику, возрастает прямо пропорционально времени t: $I = \alpha \cdot t$, где α = const. Чему равно сопротивление R проводника, если за промежуток времени $0 \le t \le \tau$, где τ = 4 с, через поперечное сечение проводника протекает заряд q = 5 Кл, а в проводнике выделяется джоулево тепло Q = 80 Дж?

Решение.

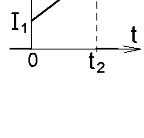
Так как $q = \int_0^\tau I dt = \int_0^\tau \alpha t dt = \frac{\alpha\tau^2}{2}$; $Q = \int_0^\tau I^2 R dt = \int_0^\tau \alpha^2 t^2 R dt = \frac{\alpha^2\tau^3 R}{3}$, то $\frac{q^2}{Q} = \frac{3\tau}{4R}$ (исключили неизвестную α). Поэтому $R = \frac{3\tau Q}{4q^2} = 9{,}6$ Ом.

Совет:

Если зависимость силы тока от времени задана с помощью графика (в задачах обычно задана линейная зависимость), то её надо выразить линейной функцией: $I = a + bt$. Параметры a и b этой зависимости определяют подстановкой числовых данных на осях графика.



Надо помнить, что интеграл равен площади под графиком подынтегральной функции. Например, протекший за время τ заряд будет равен заштрихованной площади под графиком тока.



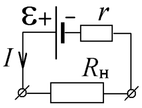
23.2. По проводнику с сопротивлением R = 2 Ом течёт ток, величина которого за интервал времени $0 \le t \le t_2 = 3$ с меняется по линейному закону от I_1 = 2 А до I_2 = 5 А (см. рисунок). Чему равно тепло Q, которое выделится в проводнике за указанный интервал времени $0 \le t \le t_2$ с, а также заряд q, который протечет по проводнику за это время?

Решение.

Так как $I = a + bt$, то при $t = 0$ имеем $I_1 = a$, а при $t = t_2$ $I_2 = a + bt_2$. Отсюда $b = (I_2 - I_1)/t_2 = 1$ А/с ; $a = I_1 = 2$ А .

Поэтому $Q = \int I^2 R dt = \int (a+bt)^2 R dt = R\left(a^2 \int\limits_0^{t_2} dt + 2ab \int\limits_0^{t_2} t dt + b^2 \int\limits_0^{t_2} t^2 dt\right) = R\left(a^2 t_2 + abt_2^2 + b^2 t_2^3/3\right) = 78$ Дж .

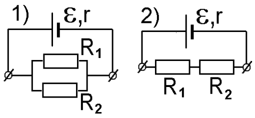
Протекший заряд $q = \int I dt$ равен площади под графиком тока: $q = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)t_2 = 10{,}5$ Кл .



В случае, когда к источнику тока с **постоянной** ЭДС ε подключается внешняя нагрузка с сопротивлением $R_н$, по цепи протекает постоянный ток $I = \varepsilon/(R_н + r)$. Помните, что у каждого источника тока имеется внутреннее сопротивление *r*. В этом случае за время Δt на нагрузке выделяется тепло $Q = I^2 R \Delta t$.

Примеры решения задач:

23.3. К клеммам источника постоянного тока с внутренним сопротивлением *r* = 40 Ом сначала подключали нагрузку из двух одинаковых сопротивлений $R_1 = R_2 = R$, соединенных параллельно (рис.1), а потом соединённых последовательно (рис.2). В цепи на рис.1 за одну минуту на нагрузке выделялось тепло Q_1 = 3,6 кДж, а в цепи на рис.2 за то же время на нагрузке выделялось тепло Q_2 = 2,5 кДж. Чему равно каждое из сопротивлений R_1 или R_2? Какой заряд протекает через нагрузку в обоих случаях?



Решение.

При параллельном соединении резисторов сопротивление нагрузки равно $R_{н1} = R_1 R_2/(R_1 + R_2) = R/2$, а при последовательном – $R_{н2} = R_1 + R_2 = 2R$. Поэтому $Q_1 = I_1^2 R_{н1} \Delta t = \left(\frac{\varepsilon}{r + R/2}\right)^2 \frac{R}{2} \Delta t$; $Q_2 = I_2^2 R_{н2} \Delta t = \left(\frac{\varepsilon}{r + 2R}\right)^2 2R \Delta t$.

Отсюда $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{36}{25} = \frac{(r+2R)^2}{4(r + R/2)^2}$, или $\frac{r + 2R}{r + R/2} = \frac{12}{5}$ и $R = \frac{7r}{4} = 70$ Ом .

Зная сопротивления, можно вычислить величину ЭДС, величину токов $I_1 = \sqrt{2Q_1/R\Delta t}$; $I_2 = \sqrt{Q_2/2R\Delta t}$, а также определить протекший за время Δt заряд: $q_1 = I_1 \Delta t = \sqrt{\frac{2Q_1 \Delta t}{R}} = 111$ Кл ; $q_2 = I_2 \Delta t = \sqrt{\frac{Q_2 \Delta t}{2R}} = 46{,}3$ Кл .

Совет: *Если в условии задачи приведены удельное сопротивление проводника* ρ *или его удельная проводимость* $\sigma = 1/\rho$, *то можно использовать закон Ома в локальной форме:* $\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$.

Здесь $\vec{E}$ - напряженность стороннего электрического поля, создающего ток, а $j = dI/dS$ - плотность тока, текущего через поперечное сечение *S* проводника, которое может иметь произвольную форму (рис.2.16). Величина силы тока, текущего по проводнику $\boxed{I = \int j dS}$. Если плотность тока во всех точках сечения *S* одинакова, то $I = jS$, а падение напряжения на проводнике длины *l* равно $\varphi_1 - \varphi_2 = \int E dl = \boxed{U = El}$.

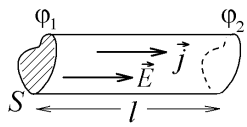
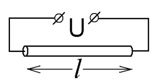


Рис.2.16

Подстановкой *j* и *E* из закона Ома в локальной форме легко получить обычную запись закона Ома $U = IR$, где сопротивление участка однородного проводника $\boxed{R = \rho l/S = l/\sigma S}$.

Примеры решения задач:

23.4. Когда проволока длины l_1 была подключена к источнику постоянного напряжения *U*, в ней каждую минуту выделялось джоулево тепло Q_1 = 729 Дж. Затем эту проволоку растянули до длины l_2 и подключили к тому же источнику напряжения *U*. Теперь каждую минуту в проволоке начало выделяться тепло Q_2 = 625 Дж. Во сколько раз была увеличена длина проволоки?



Решение.

Текущий по проволоке ток $I = U/R$ постоянен. Меняется сопротивление $R_1 = \rho l_1/S_1 \to R_2 = \rho l_2/S_2$, где *S* –сечение проволоки, уменьшающееся при её растяжении. Поэтому

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{U^2}{R_1}\Delta t \Big/ \frac{U^2}{R_2}\Delta t = \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2} .$$

При растяжении не меняется объём проволоки $V = l_1 S_1 = l_2 S_2$. Отсюда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1}$ и $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$. Длина проволоки меняется в $l_2/l_1 = \sqrt{Q_1/Q_2} = 1{,}08$ раз.

23.5. Напряженность электрического поля внутри цилиндрического проводника с радиусом r_0 = 4 мм направлена вдоль его оси и во всех точках равна E = 0,5 мВ/м. Удельная проводимость материала проводника возрастает с расстоянием r от оси проводника по закону $\sigma = \sigma_0 \left(r/r_0\right)^2$, где σ_0 = 5·10^7 (Ом·м)$^{-1}$. Найти силу тока I, текущего по проводнику.

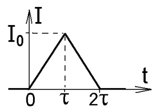
Решение:

Выражая ток через его плотность $I = \int jdS$, где $dS = d\left(\pi r^2\right) = 2\pi r dr$, и используя закон Ома в локальной форме $j = \sigma E$,

получаем $I = \int\limits_0^{r_0} \sigma E \cdot 2\pi r dr = \dfrac{2\pi\sigma_0 E}{r_0^2}\int\limits_0^{r_0} r^3 dr = \dfrac{2\pi\sigma_0 E}{r_0^2}\cdot\dfrac{r_0^4}{4} = \dfrac{\pi\sigma_0 E r_0^2}{2} = 0,628$ А .

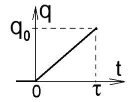
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

23.6. По проводнику течёт ток, величина которого меняется со временем t, как показано на рисунке, где I_0 = 0,6 А, τ = 3 с. Заряд какой величины q протечет через сечение проводника за интервал времени $0 \le t \le 2\tau$?



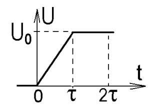
Ответ: 1,8 Кл.

23.7. В начальный момент t = 0 по проводнику с сопротивлением R = 8 Ом начинает течь ток, причем величина протекшего через поперечное сечение проводника заряда q линейно растёт со временем t (см.рисунок). Найти величину заряда q_0 протекшего к моменту времени τ = 3 с, если за промежуток времени $0 \le t \le \tau$ в проводнике выделится джоулево тепло Q = 24 Дж?

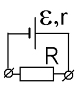


Ответ: 3 Кл.

23.8. Падение напряжения на участке проводника с сопротивлением R = 24 Ом вначале линейно возрастает со временем t, а потом постоянно и равно U_0 = 12 В (см. рисунок, где τ = 1 мин). Какое джоулево тепло выделится в проводнике за промежуток времени $0 \le t \le 2\tau$?

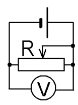


Ответ: 480 Дж.



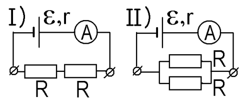
23.9. К клеммам источника постоянного тока подключена нагрузка с сопротивлением R = 30 Ом. За какой промежуток времени Δt в нагрузке выделится джоулево тепло Q = 15 Дж, если за это же время по цепи протечёт заряд q = 5 Кл? *Ответ*: 50 с.

23.10. Вначале сопротивление реостата, подключенного к источнику постоянного тока с эдс ε = 36 В, было равно R_1 = 100 Ом. Движком реостата увеличили его сопротивление в 4 раза, и при этом падение напряжения на нем в возросло в k = 1,5 раз. Какое джоулево тепло стало после этого выделяться на реостате каждую секунду?



Ответ: 2,25 Дж.

23.11. Два одинаковых резистора с сопротивлением R = 8 Ом каждый подключены к источнику постоянного тока сначала последовательно (рис.I), а потом параллельно (рис.II). Во втором случае ток, показываемый амперметром, в 2,5 раз больше, чем в первом. По цепи, изображённой на правом рис.II за время Δt =2 мин протекает заряд q_{II} = 48 Кл. Чему равна величина эдс данного источника тока? *Ответ*: 3,2 В.



23.12. Найти удельную проводимость σ однородного материала, из которого изготовлен цилиндрический проводник радиуса r_0= 5 мм, если во всех точках проводника напряженность стороннего электрического поля равна E = 0,004 В/м, а по проводнику течет ток I = 10 А.

Ответ: 3,18·10^7 (Ом·м)$^{-1}$.

23.13. Однородный проводник с удельным сопротивлением ρ = 5·10^{-6} Ом·м имеет поперечное сечение в форме квадрата со стороной a =5 мм. Величина напряженности квазистационарного стороннего электрического поля, направленного вдоль проводника, меняется со временем t по линейному закону: $E = At + B$, где A = 5 В/м·с, B = 3 В/м. Какой заряд протечет через поперечное сечение проводника за промежуток времени $0 \le t \le 2$ с ?

Ответ: 80 Кл.

24. Разветвленные электрические цепи и правила Кирхгофа

Совет:

При решении задач с разветвленными цепями делайте следующие действия, которые автоматически приведут Вас к правильному решению (для примера показана схема на рис.2.17).

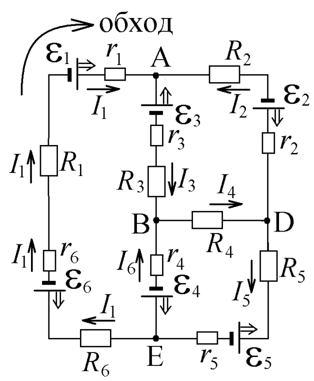
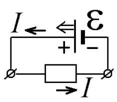


Рис.2.17

1) Аккуратно нарисуйте схему разветвленной цепи и жирными точками обозначьте все узлы – точки, где соединяются три и более проводника (точки A, B, D, E на рис.2.17);



2) **Рядом** с каждым источником ЭДС ε_i поставьте его внутреннее сопротивление r_i. На каждом источнике обозначьте стрелку =>, выходящую из его плюсовой клеммы. Эта стрелка показывает направление тока I_i, создаваемое источником ε_i в неразветвленной цепи:

3) В каждой ветви – участке цепи между двумя узлами – стрелкой обозначьте направление текущего тока. На рис.2.17 видно 6 ветвей и 6 токов $I_1 - I_6$. Старайтесь проставить индексы токов такими же, как индексы сопротивлений, по которым они текут. Вдоль одной ветви ток не дол-

жен менять ни величину, ни направление, как показано для тока I_1. Не думайте в какую сторону действительно течет ток. Если Вы ошиблись с направлением, то в ответе получите этот ток с правильной величиной, но со знаком "минус".

4) Для каждого узла можно записать первое правило Кирхгофа: $\sum I_i = 0$: токи, входящие в узел записывайте со знаком"+", а выходящие – со знаком "-". Число токов равно числу проводников, соединяющихся в узле:

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$ для узла A; $I_3 + I_6 - I_4 = 0$ для узла B; $I_4 - I_2 - I_5 = 0$ для узла D и.т.п.

5) Выберите направление обхода (по часовой стрелке на рис 2.17) и запишите второе правило Кирхгофа для любого замкнутого контура цепи: $\sum U_i = \sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i$ (алгебраическая сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом же замкнутом контуре). В цепи на рис.2.17 имеется семь **разных** замкнутых контуров (рис.2.18).

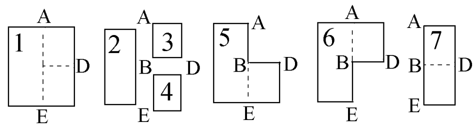


Рис.2.18

Если выбранное направление стрелки тока совпадает с направлением обхода, то этот ток в сумме берется со знаком "+", если не совпадает – со знаком "-". Если стрелка ЭДС => совпадает с направлением обхода, то эта ЭДС входит в сумму со знаком "+", если не совпадает – со знаком "-". Менять направление уже поставленных стрелок нельзя. Идите по направлению обхода и записывайте падения напряжения **только для тех сопротивлений, которые Вы встретите в выбранном контуре**. Пройдя по контуру второй раз, запишите все встреченные ЭДС с соответствующими знаками:

$I_1R_6 + I_1r_6 + I_1R_1 + I_1r_1 - I_2R_2 - I_2r_2 + I_5R_5 + I_5r_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6$ (для контура 1 на рис.2.18);

$I_1R_6 + I_1r_6 + I_1R_1 + I_1r_1 - I_2R_2 - I_2r_2 - I_4R_4 - I_6r_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_6$ (для контура 6 на рис.2.18) и.т.п.

6) Число возможных уравнений (1-е правило Кирхгофа для 4 узлов и 2-е правило для 7 контуров в цепи на рис.2.17) превышает число неизвестных токов $I_1 - I_6$. Эти уравнения будут линейно зависимыми.

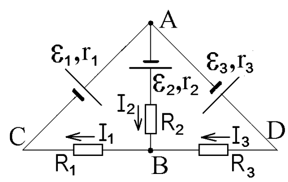
Совет: *Линейно независимыми для цепи с N узлами будут уравнения 1-го правила Кирхгофа для любых $N-1$ узлов и уравнения 2-го правила Кирхгофа для самых маленьких контуров, пустых внутри.*

Для цепи на рис.2.17 это, например, узлы A, B и D, и контуры 2, 3 и 4 (см. рис. 2.18). Остается без ошибок решить записанную систему линейных уравнений.

Как правило, в задаче контрольной работы надо рассчитать цепь с двумя узлами. В этом случае решается простая система из трех уравнений.

Примеры решения задач:

24.1. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину сопротивления R_3, если известно, что $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $\varepsilon_1 = 12$ В; $\varepsilon_2 = 8$ В; $\varepsilon_3 = 10$ В; $I_2 = 2$ А.



Решение.

Линейно независимой будут уравнения системы из 1-го правила Кирхгофа, записанного для узла B: $I_2 + I_3 - I_1 = 0$, и двух 2-х правил Кирхгофа, записанных для треугольных контуров CAB и BAD: $I_1R_1 + I_1r_1 + I_2R_2 + I_2r_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$; $I_3R_3 + I_3r_3 - I_2R_2 - I_2r_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$.

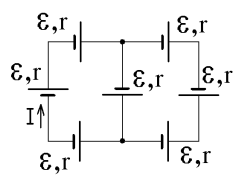
(как и на рис.2.17, направление обхода – по часовой стрелке). Эта система из трех уравнений содержит три неизвестные величины I_1, I_3 и R_3.

Совет: *Решать такую систему в буквенных обозначениях всё ещё слишком громоздко. Если Вы уверены в записанных уравнениях – подставьте все числовые значения из условия в системе СИ. Тогда ответ также получится в системе СИ. Уравнения станут простыми, но проверить размерности Вы уже не сможете.*

Из второго уравнения находим единственную не заданную в нем величину $I_1 = 4$ А. Подставляя её в первое уравнение, находим $I_3 = I_1 - I_2 = 2$ А.

Последнюю неизвестную R_3 находим из последнего уравнения, подставляя все найденные величины: $R_3 = 4$ Ом.

24.2. Семь одинаковых источников тока с внутренним сопротивлением r = 1 Ом каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину ЭДС ε каждого из источников, если по левому проводнику протекает ток I = 3,2 А.



Решение.

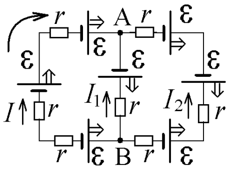


Рис.2.19

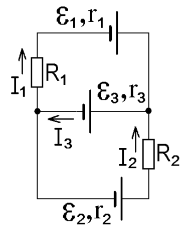
Направим стрелки токов I_1 и I_2 вверх, как и стрелку тока I. Все токи сходятся в узле A (рис.2.19) $I + I_1 + I_2 = 0$. Это означает, что направление каких-то токов указано неверно и в процессе вычисления эти токи будут иметь разный знак. Для контуров слева и справа от линии AB 2-е правило Кирхгофа имеет вид:

$Ir + Ir + Ir - I_1r = \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon$, $I_1r - I_2r - I_2r - I_2r = \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon$.

Получили систему с тремя неизвестными I_1, I_2 и ε:

$\begin{cases} I_1 + I_2 = -I, \\ 2\varepsilon + I_1r = 3Ir, \\ I_1r - 3I_2r = 0. \end{cases}$ Из последнего уравнения $I_2 = \dfrac{I_1}{3}$, из первого $I_1 = -\dfrac{3}{4}I$, из второго уравнения $\varepsilon = \dfrac{(3I - I_1)r}{2} = \dfrac{15Ir}{8} = 6$ В.

Токи $I_1 = -2,4$ А и $I_2 = -0,8$ А имеют правильную величину, но направления их мы не угадали.



24.3. Три источника тока с одинаковыми внутренними сопротивлениями $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину падения напряжения U_3 на клеммах источника тока с ЭДС $\varepsilon_3 = 9$ В и внутренним сопротивлением r_3, если $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $\varepsilon_1 = 16$ В; $\varepsilon_2 = 25$ В.

Решение.

Направления токов на рисунке уже заданы. 1-е правило Кирхгофа для левого узла имеет вид $I_3 - I_1 - I_2 = 0$. 2-е правило Кирхгофа для верхнего маленького контура $I_1R_1 + I_1r_1 + I_3r_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$, для нижнего маленького контура $-I_3r_3 - I_2R_2 - I_2r_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$ (обход – по часовой стрелке). После подстановки числовых данных в СИ имеем простую систему: $\begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0, \\ 3I_1 + I_3 = 7, \\ I_3 + 4I_2 = 16. \end{cases}$ Решение этой системы дает $I_1 = 1$ А ; $I_2 = 3$ А ; $I_3 = 4$ А .

Совет: *Помните, что если ток I* ***разряжает*** *батарею с ЭДС ε и с внутренним сопротивлением r (рис. 2.20,а), то падение напряжения на её клеммах* $\boxed{U = \varepsilon - Ir}$. *Если же ток* ***заряжает*** *батарею (рис.2.20,б), то* $\boxed{U = \varepsilon + Ir}$. *Величина* $U > \varepsilon$, *иначе ток не потечет против источника ЭДС.*

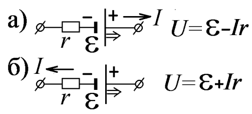
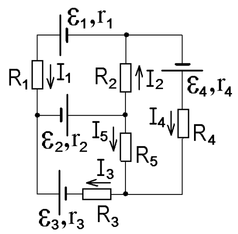


Рис.2.20

В нашей задаче, как видно из рисунка, ток I_3 направлен против источника ЭДС ε_3, и напряжение на его клеммах $U_3 = \varepsilon_3 + I_3 r = 13$ В.

Совет: *Если цепь содержит больше двух узлов и линейно независимых уравнений слишком много, расставьте все числовые данные задачи на схеме и определите узлы или контуры, для которых уравнения правил Кирхгофа включают только одну неизвестную величину.*



24.4. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$ Ом. Найти величину падения напряжения на клеммах источника ε_2, если известно, что $\varepsilon_2 = 7$ В; $\varepsilon_4 = 4$ В; $R_2 = 2$ Ом; $R_4 = 5$ Ом; $R_5 = 7$ Ом; $I_2 = 3$ А; $I_4 = 2$ А.

Решение.

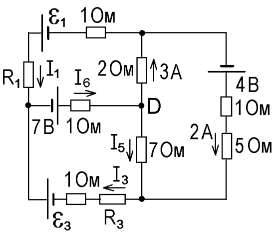
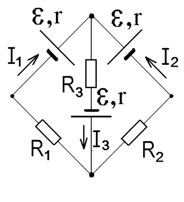


Рис.2.21

Обозначим все числовые данные задачи на схеме (рис.2.21). Теперь видно, что в уравнение 2-го правила Кирхгофа для правого контура входит единственная неизвестная величина – ток I_5: $I_2R_2 + I_4\left(R_4 + r_4\right) - I_5R_5 = \varepsilon_4$, откуда легко найти $I_5 = 2$ А .

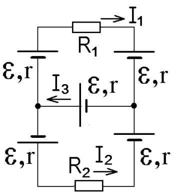
Далее из уравнения 1-го правила Кирхгофа для узла D (рис.2.21) находим величину тока $I_6 = I_2 + I_5 = 5$ А . Этот ток будет разряжать источник ε_2, и падение напряжения на его клеммах согласно рис.1.20,а, равно $U_2 = \varepsilon_2 - I_6 r_2 = 4$ В .

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



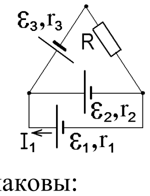
24.5. Три одинаковых источника тока с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке справа. Найти величину ЭДС ε каждого из источников тока, если $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $I_3 = 5$ А.

Ответ: 13 В.



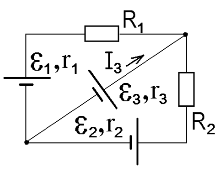
24.6. Пять одинаковых источников тока с ЭДС ε =11 В каждый включены в разветвленную цепь, показанную на рисунке слева. Найти величину внутреннего сопротивления r источника тока, если $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 6$ Ом; $I_1 = 1$ А.

Ответ: 1,5 Ом



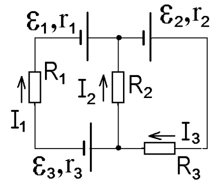
24.7. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину тока I_1, текущего через источник ε_1, если известно, что $R = 5$ Ом; $\varepsilon_1 = 8$ В; $\varepsilon_2 = 4$ В; $\varepsilon_3 = 32$ В.

Ответ: 0 А.



24.8. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке слева одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину ЭДС ε_3, , если известно, что $R_1 = 3$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $\varepsilon_1 = 2$ В; $\varepsilon_2 = 10$ В; $I_3 = 2$ А.

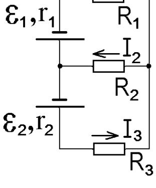
Ответ: 12 В.



24.9. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину тока I_2, текущего через сопротивление R_2 , если известно, что

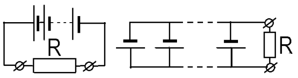
$R_1 = R_3 = 3$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $\varepsilon_1 = 12$ В; $\varepsilon_2 = 14$ В; $\varepsilon_3 = 4$ В.

Ответ: 1 А



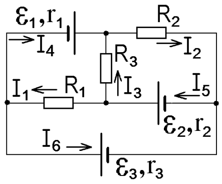
24.10. Внутренние сопротивления двух источников тока, приведенных на рисунке слева одинаковы: $r_1 = r_2 = 1$ Ом. Найти величину сопротивления R_2, если известно, что

$R_1 = 2$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $\varepsilon_1 = 9$ В; $\varepsilon_2 = 36$ В; $I_2 = 3$ А. *Ответ*: 3 Ом.



24.11. Одиннадцать одинаковых источников ЭДС с внутренним сопротивлением r = 12 Ом каждый соединяют в батарею вначале последовательно, а потом параллельно, и подключают к клеммам этих батарей одну и ту же нагрузку. Найти сопротивление нагрузки R, если при последовательном соединении источников ток в нагрузке в два раза больше, чем при параллельном.

Ответ: 28 Ом.



24.12. Три источника тока включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину сопротивления R_2, если известно, что ε_1 =3 В; ε_2 =9 В; $r_1 = r_2$ = 1 Ом; R_1 = 2 Ом; I_1 = 2 А; $I_3 = I_4$ = 1 А.

Ответ: R_2 = 2 Ом.

25. Расчет магнитных полей, созданных линейными токами

Элемент тока I длины $d\vec{l}$, направленный по току, создает на расстоянии $\vec{r}$ магнитное поле с индукцией $\boxed{d\vec{B} = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}}$ (рис.2.22). Здесь μ – магнитная проницаемость среды ($\mu = 1$ в вакууме или воздухе), $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная.

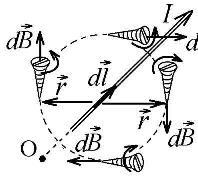


Рис.2.22

В задачах очень важно правильно определить направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в любой точке. Для этого надо поставить винт перпендикулярно току и радиус-вектору $\vec{r}$, проведенному в эту точку. Если вращать винт ближней стороной по направлению тока, как показано на рис.2.22, то направление его поступательного движения покажет направление вектора $\vec{B}$. Замкнутые линии $\vec{B}$ охватывают проводник с током.

Чтобы найти индукцию $\vec{B}$ всего тока надо взять интеграл по длине проводника: $\vec{B} = \int d\vec{B}$. В задачах контрольной работы встречаются токи, текущие по круговому или по прямому проводнику.

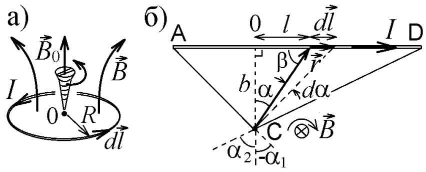


Рис.2.23

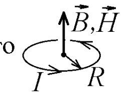
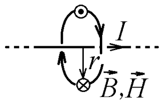
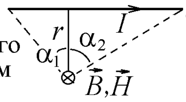
В центре 0 кругового витка радиуса R с током I (рис.2.23,а) получаем $B_0 = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{rdl\sin 90^{\circ}}{r^3} = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2}\underbrace{\oint dl}_{=2\pi R} = \dfrac{\mu\mu_0 I}{2R}$.

Для точки С, находящейся на расстоянии b от прямого отрезка с током I, как видно из треугольника на рис.2.23,б, выполняются соотношения $r = b/\cos\alpha$; $l = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $dl = bd(\mathrm{tg}\,\alpha) = bd\alpha/\cos^2\alpha$. Угол β между радиус-вектором $\vec{r}$ и элементом тока $Id\vec{l}$ равен $\beta = 90^{\circ} - \alpha$. Поэтому $B_C = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\displaystyle\int\dfrac{rdl\sin\beta}{r^3} = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi b}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha d\alpha = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi b}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)$.

Пределы интегрирования $-\alpha_1$ и α_2 соответствуют граничным точкам A и D отрезка с током (точка 0 на рис.2.23,б соответствует углу $\alpha = 0$). Для бесконечного прямого проводника с током $\alpha_1, \alpha_2 \to 90^{\circ}$ и $B_C = \dfrac{\mu\mu_0}{2\pi b}$.

Помимо индукции $\vec{B}$ магнитное поле можно описать вектором напряженности $\vec{H}$, которая в неферромагнитной среде имеет вид $\vec{H} = \vec{B}/\mu\mu_0$.

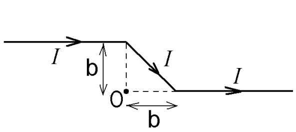
Все полученные для индукции $\vec{B}$ формулы будут справедливыми и для напряженности $\vec{H}$ магнитного поля, если в них убрать множитель $\mu\mu_0$:

в центре кругового тока		$B=\dfrac{\mu\mu_0 I}{2R}$, $H=\dfrac{I}{2R}$
для бесконечного прямого тока		$B=\dfrac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}$, $H=\dfrac{I}{2\pi r}$
для прямолинейного отрезка с током		$B=\dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)$ $H=\dfrac{I}{4\pi r}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)$

В задачах контрольной работы линейные токи состоят из отдельных участков круговых токов, прямолинейных отрезков с токами и прямых бесконечных проводников с токами. Необходимо разбить систему на такие участки, определить величину ***и правильное направление*** *вектора $\vec{B}$ или $\vec{H}$, созданного током, текущим по каждому участку, а затем сложить все эти векторы.*

Учтите, что на продолжении прямого тока (точка O *на рис.2.22) поле не создается:* $B_O = 0$.

Примеры решения задач:



25.1. По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых проводников, как показано на рисунке, течет ток I = 3 А. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в точке О, если b = 40 см.

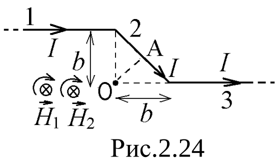
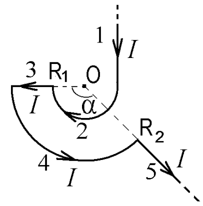


Рис.2.24

Решение.

Разбиваем систему на отдельные прямолинейные участки 1, 2 и 3 (рис.2.24). Участок 1 – это полубесконечный ток, создающий в точке О напряженность $H_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{I}{2\pi b}$. Участок 2 – прямолинейный отрезок, находящийся на расстоянии $r = \mathrm{OA} = b\cos 45^{\circ}$ от точки О. Его концы видны из этой точки под углами $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^o$.Он создает напряженность $H_2 = \frac{I}{4\pi r}\cdot 2\sin 45^o = \frac{I}{2\pi b}$. Точка О находится на продолжении прямого участка 3, и этот участок поля в ней не создает: $H_3 = 0$. Как видно из рис.2.24, направления векторов $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ совпадают и их сумма $H_O = H_1 + H_2 = 3I/4\pi b = 1,79$ А/м .

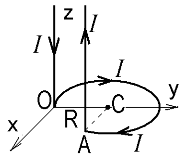


25.2. По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых полубесконечных линий, двух дуг с радиусами R_1 = 1 м и R_2 = 2 м (внешняя дуга имеет угол α = 135^o) и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток I = 3 А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре 0 дуг.

Решение.

Прямые участки 3 и 5 на рисунке не создают полей в точке О на их продолжении. Поэтому $\vec{B}_O = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_4$. Индукция полубесконечного тока 1 $B_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$ и индукция половины кругового тока 2 $B_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R_1}$ направлены в одну сторону, а индукция, созданная участком 4, являющимся частью окружности, $B_4 = \frac{135^o}{360^o}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R_2}$, направлена противоположно. Так как $R_2 = 2R_1$, то в точке О имеем $B_O = \left|B_1 + B_2 - B_4\right| = \frac{\mu_0 I}{4R_1}\left|\frac{1}{\pi} + 1 - \frac{3}{8}\right| = 0,889$ мкТл .

Совет: *Если векторы $\vec{B}$ или $\vec{H}$ направлены под углом друг к другу, то удобно указать их направления в трех осях декартовой системы координат.*



25.3. Бесконечный проводник согнут так, что текущий по нему ток I = 3 А вначале течет против оси z, затем поворачивает в начале координат О, образуя дугу окружности с углом 270^o и с радиусом R = 1 м, лежащую в плоскости xy, а затем снова поворачивает в точке А и течет по прямой линии, направленной параллельно оси z. Найти величину индукции магнитного поля в центре дуги С.

Решение.

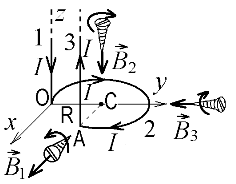
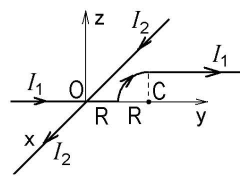


Рис.2.25

Определяем направления полей, созданных отдельными участками (рис.2.25) с помощью винтов, острия которых должны находиться в точке С. Направление вращения винтов связаны с направлением токов (см.рис.2.22). Как видно, вектор индукции поля полубесконечного тока 1 имеет величину $B_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ и направлен вдоль оси x; вектор индукции, созданный $3/4$ кругового тока 2, и имеющий величину $B_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R}$ направлен против оси z; вектор индукции полубесконечного тока 3, $B_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, направлен против оси y (рис.2.25). Все эти векторы взаимно перпендикулярны, а их векторная сумма имеет в точке С величину $B_C = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2} = \frac{\mu_0 I}{4R}\sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{\pi^2}} = 1,48$ мкТл .

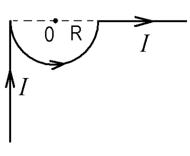


25.4. Ток I_1 = 1 А течёт по бесконечному проводнику, вначале совпадающему с осью y, затем образующему дугу в четверть окружности с радиусом R = 1 м, лежащую в плоскости yz. Далее проводник продолжается в виде прямой линии, параллельной оси y. Расстояние от центра дуги С до начала координат О равно 2R. Второй ток I_2 = 3 А течет по бесконечному проводнику вдоль оси x (см. рисунок). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этими токами в центре дуги С.

Решение.

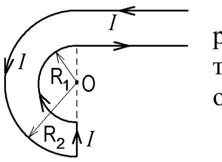
В точке С первый ток создает напряженность $H_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{I_1}{2R} + \frac{1}{2}\cdot\frac{I_1}{2\pi R}$, вектор которой направлен против оси x (это поле 1/4 кругового тока, протекающего по дуге и поле половины бесконечного прямого тока). Второй ток, находящийся на расстоянии 2R от точки С, создает напряженность $H_2 = \frac{I_2}{2\pi\cdot 2R}$, вектор которой направлен вдоль оси z. Величина суммы этих векторов $H_C = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \frac{1}{4R}\sqrt{\left(\frac{I_1}{2} + \frac{I_1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{\pi}\right)^2} = 0,314\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



25.5. По бесконечному проводнику, согнутому, как показано на рисунке, течет ток I = 3 А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре 0 дуги с радиусом R = 20 см.

Ответ: 3,21 мкТл.

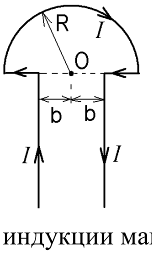


25.6. По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных прямых линий, двух полуокружностей с радиусами R_1 = 50 см и R_2 = 1 м и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток I = 5 А. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре О полуокружностей.

Ответ: 1,648 А/м.

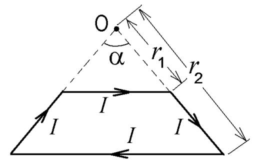
25.7. По замкнутому проводнику, согнутому в виде дуги с радиусом R = 20 см и соединяющей её концы хорды (см. рисунок), течет ток I = 3 А. Найти величину напряженности магнитного поля в центре О дуги, если угол $\alpha = 90^{o}$.

Ответ: 8,01 А/м.



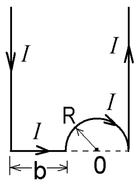
25.8. По бесконечному проводнику, согнутому в виде полуокружности с радиусом R = 60 см, двух прямых отрезков и двух параллельных линий, течет ток I = 4 А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре О полуокружности (см. рисунок), если b = 30 см.

Ответ: 4,76 мкТл.



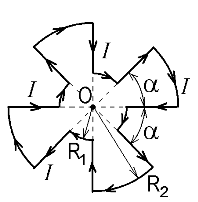
25.9. По проводнику, согнутому в виде симметричной трапеции, течет ток I = 3 А. Размеры приведены на рисунке, где r_1 = 20 см, r_2 = 50 см, $\alpha = 90^{o}$. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в точке О.

Ответ: 1,8 мкТл.

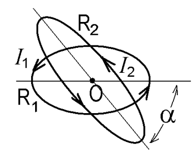


25.10. По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных линий, полуокружности с радиусом R = = 40 см и прямого отрезка длины b = 50 см, течет ток I = 2 А (см.рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого током в центре О полуокружности.

Ответ: 0,849 мкТл.

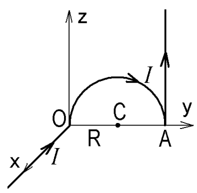


25.11. По проводнику, согнутому в виде восьми круговых дуг с одинаковыми углами $\alpha = 45^{o}$ и с радиусами R_1 = 40 см и R_2 = 80 см, а также восьми соединяющих их прямых отрезков, как показано на рисунке, течет ток I = 5 А. Найти величину индукции магнитного поля в общем центре дуг О. *Ответ*: 5,89 мкТл.



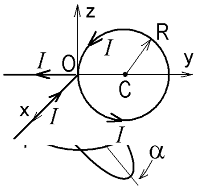
25.12. По согнутым в кольца проводникам с радиусами $R_1 = R_2$ = 1 м текут одинаковые токи $I_1 = I_2$ = 3 А. Угол между плоскостями проводников $\alpha = 60^{o}$ (см. рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого токами в общем центре О колец.

Ответ: 3,26 мкТл.



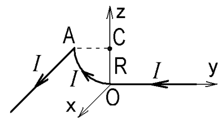
25.13. Бесконечный проводник согнут так, что образованная им полуокружность с радиусом R = = 40 см расположена в плоскости yz. Направление текущего по нему тока I = 3 А указано на рисунке. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого током в центре С полуокружности.

Ответ: 1,41 А/м.



25.14. Бесконечный проводник согнут так, что ток I = 4 А течет по нему против оси x, поворачивает в начале координат О, протекая по окружности с радиусом R = 30 см, расположенной в плоскости yz, а затем течет против оси y (см.рисунок). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре С окружности.

Ответ: 7,00 А/м



25.15. Ток I = 3 А течет по согнутому бесконечному проводнику против оси y, поворачивает в начале координат О, протекая по дуге окружности с углом 90^{o} и с радиусом R = 50 см, расположенной в плоскости yz, снова поворачивает в точке А и течет по прямой линии, направленной вдоль оси x (см.рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре дуги С.

Ответ: 1,66 мкТл.

26. Расчет магнитных полей с помощью теоремы о циркуляции

Циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру называется интеграл $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$. Циркуляция вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля равна произведению $\mu\mu_0$ на **алгебраическую** сумму токов, охватываемых контуром: $\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum I_i}$

(для вектора напряженности $\vec{H}$ циркуляция по замкнутому контуру равна $\boxed{\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_i}$).

Чтобы определить знак тока в этой сумме, расположите винт перпендикулярно плоскости контура и вращайте его по направлению обхода контура. Если направление тока совпадает с направлением поступательного движения винта, то этот ток входит в сумму с положительным знаком. Если ток направлен противоположно движению винта, то он входит в сумму со знаком "минус".

Например, на рис.2.26 винт, вращающийся по направлению обхода контура, движется вверх. В эту сторону направлены токи I_1 и I_4, охватываемые контуром, а противоположно – токи I_2 и I_3. Согласно теореме о циркуляции $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \left(I_1 - I_2 - I_3 + I_4\right)$. Ток I_5 создает поле, но не охватывается контуром, и в сумму не входит.

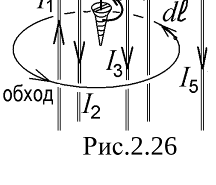
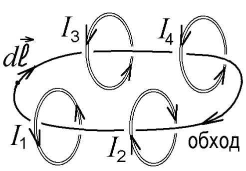


Рис.2.26

Совет: *Внимательно следите на рисунке, сколько раз линия замкнутого контура* ***охватывает*** *каждый ток. Если ток охватывается N раз, то в сумму он также входит N раз.*

Примеры решения задач:

26.1. Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами I_1= 2 А, I_2= 1 А, I_3= 4 А и I_4. Направление обхода контура и направления токов указаны на рисунке. Циркуляция вектора индукции магнитного поля $\oint \vec{B}d\vec{l}$ по этому контуру равна 5 мкТл·м. Найти величину тока I_4.



Решение.

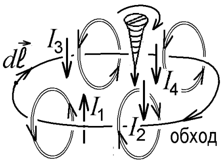
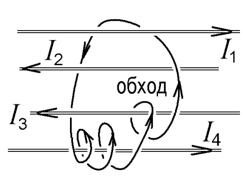


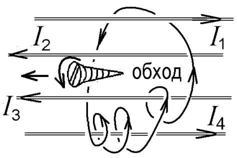
Рис.2.27

На рис.2.27 дополнительными стрелками указаны направления токов I_i **внутри** охватывающего их замкнутого контура. Винт, вращаемый по направлению обхода контура, движется вниз. В эту сторону направлены токи I_2, I_3, I_4. Здесь $\mu = 1$. Поэтому $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(-I_1 + I_2 + I_3 + I_4\right)$ и $I_4 = I_1 - I_2 - I_3 + \oint \vec{B}d\vec{l}\big/\mu_0 = 0{,}979$ А.

26.2. На рисунке показан замкнутый контур, направление его обхода и прямолинейные проводники с токами I_1= 3 А, I_2, I_3= 1 А, I_4= 2 А. Циркуляция вектора индукции магнитного поля, созданного этими токами по указанному контуру отрицательна и равна $\oint \vec{B}d\vec{l} = -4$ мкТл·м. Найти величину тока I_2.



Решение.

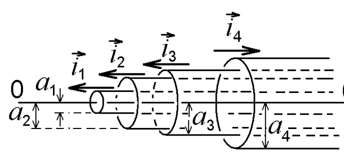


Приглядитесь к рисунку внимательно! Линия контура проходит за током I_1, не охватывая его. Перед током I_4 эта линия проходит три раза, т.е. ток I_4 охватывается 3 раза, ток I_3 - 2 раза, ток I_2 - один раз.

Вращаемый по направлению обхода винт движется налево, вдоль токов I_2 и I_3. Поэтому, согласно теореме о циркуляции $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(I_2 + 2I_3 - 3I_4\right)$, откуда $I_2 = 3I_4 - 2I_3 - \left|\oint \vec{B}d\vec{l}\right|\big/\mu_0 = 0{,}817$ А.

Совет: *Теорему о циркуляции удобно применять для расчета магнитного поля токов с симметричным распределением плотности тока $\vec{j}$ или поверхностной плотности тока $\vec{i}$.*

26.3. По четырем тонким и очень длинным цилиндрическим проводящим поверхностям, имеющим радиусы a_1= 1 см, a_2= 2 см, a_3= 3 см и a_4=4 см протекают токи с поверхностными плотностями i_1= 3 А/м, i_2= = 4 А/м, i_3=5 А/м и i_4=6 А/м соответственно. Направления токов показаны на рисунке. На каком расстоянии *r* от общей оси 00' проводников величина индукции магнитного поля *B* = 0,5 мкТл, при условии, что $r > a_4$?



Решение.

Поверхностная плотность тока задается формулой $\boxed{i = dI/dl}$, где dI – это ток, протекающий по полоске поверхности ширины dl. Поэтому величина тока, текущего по цилиндрической поверхности радиуса a равна $I = i \cdot 2\pi a$ (рис.2.28). Окружим цилиндр круговым замкнутым контуром радиуса $r > R$, совпадающим с линией индукции $\vec{B}$ магнитного поля, созданного током I внутри контура. По теореме о циркуляции $\oint \vec{B}d\vec{l} = B \cdot \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$. Хотя ток и распределен в пространстве, он создает такое же поле, как и линейный ток *I*, проходящий по оси цилиндра. Подставив *I*, получим $B = \mu_0 ia/r$. В нашей задаче круговой контур радиуса *r* охватит четыре проводника, по которым токи i_1, i_2, i_3 текут в одну сторону, а ток i_4 - в другую. Циркуляция $\oint \vec{B}d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi\left(i_1a_1 + i_2a_2 + i_3a_3 - i_4a_4\right)$, откуда $r = \mu_0\left(i_1a_1 + i_2a_2 + i_3a_3 - i_4a_4\right)\big/B = 5{,}03$ см.

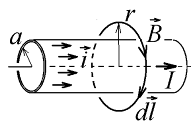
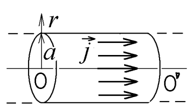


Рис.2.28

26.4. По длинному прямому цилиндрическому проводнику радиуса a течёт постоянный ток с однородной плотностью $\vec{j} = \mathrm{const}$. Величина напряжённости магнитного поля на расстоянии r_1 = 4,8 мм от оси проводника ОО' в полтора раза больше величины напряженности на расстоянии r_2 = 0,8 мм от оси. Найти радиус a проводника, если $r_2 < a < r_1$.



Решение.

Снова окружим проводник круговым замкунтым контуром радиуса $r > a$ (рис.2.29), который охватит ток $I = j \cdot \pi a^2$, протекающий через все поперечное сечение проводника. Согласно теореме о циркуляции: $\oint \vec{H}d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = I$. Поэтому вне проводника, при $r > a$, его поле совпадает с полем линейного тока $H_{\text{вне}} = \dfrac{I}{2\pi r} = \dfrac{ja^2}{2r}$. Внутри проводника, при $r < a$, линии $\vec{H}$ также образуют круговой контур, но он охватывает только ток $I = j \cdot \pi r^2$, протекающий через меньшее, заштрихованное на рис.1.29 сечение. Получаем $H_{\text{внутри}} = I/2\pi r = jr/2$.

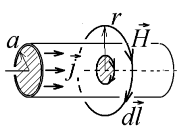
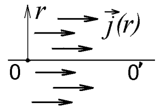


Рис.2.29

По условию $\dfrac{H_{\text{вне}}(r_1)}{H_{\text{внутри}}(r_2)} = \dfrac{ja^2}{2r_1} \cdot \dfrac{2}{jr_2} = \dfrac{a^2}{r_1 r_2} = \dfrac{3}{2}$. Радиус проводника $a = \sqrt{3r_1 r_2/2} = 2{,}4$ мм .



26.5. В среде с $\mu = 1$ вдоль выделенной оси OO' течёт постоянный ток, плотность которого меняется с расстоянием r от оси по закону $j = j_0 \cdot \sqrt{b/r}$, где b = 0,5 м, j_0 = 3000 А/м^2. Найти величину индукции B магнитного поля, созданного этим током на расстоянии r = 2 м от оси OO'.

Решение.

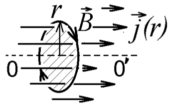


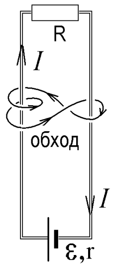
Рис.2.30

Если плотность тока $\vec{j}$ симметрична относительно оси OO', то линии вектора $\vec{B}$, созданного этим током, охватывают ось OO' по кругу (рис.2.30). Запишем теорему о циркуляции для контура радиуса r, совпадающего с одной из линий $\vec{B}$: $\oint \vec{B}d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$. Величина тока, охватываемого этим контуром

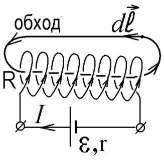
$\sum I = \int\limits_0^r jdS = \int\limits_0^r jd\left(\pi r^2\right) = \int\limits_0^r j \cdot 2\pi r dr$. Подставляя заданную зависимость $j = j(r)$, находим

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int\limits_0^r j_0 \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot 2\pi r dr = 2\pi\mu_0 j_0 \sqrt{b} \int\limits_0^r \sqrt{r} dr = 2\pi\mu_0 j_0 \sqrt{b} \cdot \frac{2}{3} r^{3/2}$$, откуда $B = 2\mu_0 j_0 \sqrt{br}/3 = 2{,}51$ мТл .

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

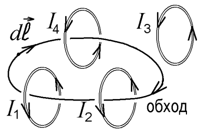


26.6. Резистор с сопротивлением R = 10 Ом подключен длинными проводами к источнику тока с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r = 2 Ом. Циркуляция вектора $\vec{B}$, созданного протекающим по цепи током I, по замкнутому контуру, направление обхода которого показано на рисунке, равна $\oint \vec{B}d\vec{l} = 3$ мкТл·м. Найти величину ЭДС ε. *Ответ*: 3,18 В.



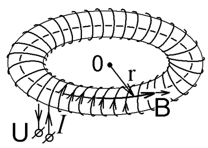
26.7. Источник тока с эдс ε = 24 В подключен к катушке из N =8 витков, имеющей омическое сопротивление R = 10 Ом. По катушке течёт постоянный ток, а циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по замкнутому контуру, показанному на рисунке, равна $\oint \vec{H}d\vec{l} =$ -30 А. Чему равно внутреннее сопротивление r источника тока?

Ответ: 3,6 Ом.



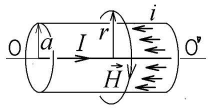
26.8. Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами I_1= 1 А, I_2= 2 А, I_3= 3 А и I_4 (см. рисунок). Циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру отрицательна и равна $\oint \vec{B}d\vec{l} = -2$ мкТл·м. Найти величину тока I_4.

Ответ: 1,41 А.

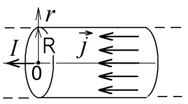


26.9. Провод с сопротивлением R = 30 Ом равномерно навит на тороидальный сердечник из материала с магнитной проницаемостью μ = 25. Ток I, текущий по виткам получившейся катушки, имеющей N = 600 витков, создаёт в сердечнике на удалении r = 9 см от центра катушки O магнитное поле с индукцией B = 0,05 Тл. Чему равно напряжение U, приложенное к концам провода?

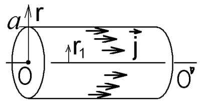
Ответ: 45 В.



26.10. По осевому тонкому проводнику-жиле длинного прямого коаксиального кабеля течёт ток I = 3 А. По второму тонкому цилиндрическому проводнику с радиусом a = 4 мм протекает встречный ток с поверхностной плотностью i = 100 А/м. На каком расстоянии r от оси кабеля OO' напряженность магнитного поля равна H = 3 А/м? *Ответ*: 2,58 см



26.11. Ток I = 1 А протекает по длинному цилиндрическому проводнику радиуса R = 1 см и имеет однородную плотность $\vec{j} = \text{const}$. Чему равна величина индукции $\vec{B}$ магнитного поля на расстоянии r = 5 мм от оси проводника? *Ответ*: 10 мкТл.



26.12. По длинному прямому цилиндрическому проводнику радиуса a = 5 мм течёт ток с неоднородной плотностью $j = j_0 \cdot (r/a)^3$, зависящей от расстояния r до оси проводника OO'. На каком расстоянии r_1 от оси проводника напряжённость созданного током магнитного поля равна H = 100 А/м? Известно, что j_0 = 1,6·10^6 А/м^2.

Ответ: 2,5 мм или 8 см.

27. Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях

В электромагнитном поле с напряженностью $\vec{E}$ и индукцией $\vec{B}$ на частицу с зарядом q и с массой m, движущуюся со скоростью $\vec{\mathrm{v}}$ действует сила Лоренца $\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{\text{элект}} + \vec{F}_{\text{магн}} = q\vec{E} + q\left[\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}\right]}$, являющаяся суммой электрической и магнитной сил.

Совет: *Чтобы решить задачу, аккуратно нарисуйте направления векторов $\vec{E}, \vec{B}$ и $\vec{v}$ в декартовой системе координат, правильно укажите направления сил и сообразите, по какой траектории будет двигаться частица под действием этих сил.*

Примеры решения задач:

27.1. Положительно заряженная частица движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ в однородных электрическом и магнитном полях. Векторы напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны. Найти минимальную величину скорости частицы, если E = 100 В/м, B = 0,01 Тл.

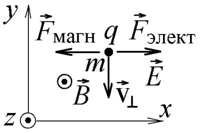


Рис.2.31

Решение.

Так как по условию $\vec{v}$=const, то $\vec{F} = \vec{F}_{\text{элект}} + \vec{F}_{\text{магн}} = 0$. Направим вектор $\vec{E}$ вдоль оси x, а вектор $\vec{B}$ - вдоль оси z. Магнитная составляющая силы Лоренца компенсирует электрическую составляющую: $F_{\text{элект}} = qE = F_{\text{магн}} = q\text{v}_\perp B$ (рис.2.31). Видно, что вектор скорости частицы $\vec{v}_\perp$ направлен против оси y.

Совет: *Определить направление $\vec{F}_{\text{магн}} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$ (векторного произведения) для частицы с положительным зарядом проще с помощью "правила левой руки": если направить четыре пальца по первому вектору $\vec{v}$, а второй вектор $\vec{B}$ входит в ладонь, то большой палец показывает направление $\vec{F}_{\text{магн}}$ (рис.2.32,а). Для частицы с отрицательным зарядом используйте "правило правой руки" (рис.2.32,б).*

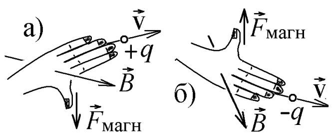
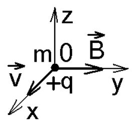


Рис.2.32

Скорость $\text{v}_\perp = E/B = 10^4$ м/с будет минимальной скоростью, так как частица может иметь любую проекцию скорости v_z на ось z, параллельную вектору $\vec{B}$. Это не изменит решения, так как не изменит ни величину, ни направление силы $\vec{F}_{\text{магн}}$.

27.2. Частица с положительным зарядом q и с массой m движется в магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого направлена вдоль оси y. В начальный момент t_0= 0 она находилась в точке 0 начала координат и имела скорость $\vec{v}$, направленную вдоль оси x. В момент времени t_1= 3 мс координата z частицы в первый раз становится максимальной и равной z_m= 10 см. Найти расстояние частицы от точки 0 в момент времени t_2= 2 мс.



Решение.

Если скорость $\vec{v} \perp \vec{B}$ (рис.2.33), то в однородном магнитном поле частица движется по окружности, радиус R которой можно найти, подставляя нормальное ускорение $a_n = \text{v}^2/R$ в уравнение динамики: $ma_n = F_{\text{магн}}$ или $m\text{v}^2/R = q\text{v}B$, откуда $\boxed{R = m\text{v}/qB}$. Период обращения частицы по этой окружности $\boxed{T = \dfrac{2\pi R}{\text{v}} = \dfrac{2\pi m}{qB}}$.

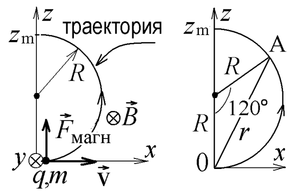
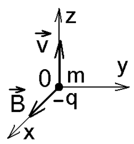


Рис.2.33

Нарисовав направления векторов и траекторию согласно условиям задачи, видим, что $R = \dfrac{z_m}{2}$. Время $t_1 = \dfrac{T}{2} = 3$ с. За это время частица пройдет половину окружности с углом 180°. А за время $t_2 = 2$ с она опишет дугу окружности с углом 120° и будет находиться в точке А на расстоянии $r = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 120^\text{o}} = \sqrt{3}R = \sqrt{3}z_m/2 = 8{,}66$ см от точки 0.

27.3. Частица с отрицательным удельным зарядом q/m = $2 \cdot 10^9$ Кл/кг, ускоренная разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 1 кВ, в начальный момент t_0= 0 находится в точке 0 (см. рисунок) и движется со скоростью v = 200 м/с, направленной вдоль оси z в однородном магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого направлена вдоль оси x. В момент времени t = 5 мкс её скорость в первый раз будет направлена против оси y. На каком удалении от точки 0 частица окажется в этот момент времени, и какой путь она пройдет за время t?



Решение.

Работа, совершаемая ускоряющим напряжением $U = \Delta\varphi$, идет на изменение кинетической энергии частицы: $A = q\Delta\varphi = m\text{v}^2/2$. Поэтому, проходя ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi$, частица приобретает скорость $\boxed{\text{v} = \sqrt{2q\Delta\varphi/m}}$.

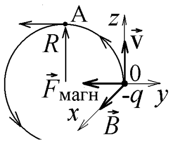
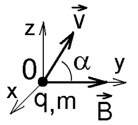


Рис.2.34

Указывая направление силы $\vec{F}_{\text{магн}}$ и рисуя круговую траекторию частицы (рис.2.34), видим, что скорость будет направлена против оси y в точке А, когда частица пройдет четверть окружности за время $t = \dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi m}{qB}$. Отсюда $B = \dfrac{\pi m}{qt}$. Подставляя найденное выражение для v, находим радиус траектории: $R = \dfrac{m\text{v}}{qB} = \dfrac{t}{\pi}\sqrt{\dfrac{2q\Delta\varphi}{m}} = \ = 3{,}18$ м. За время t частица проделает путь $2\pi R/4 = 5$ м и удалится от точки 0 на расстояние $\text{AO} = \sqrt{2}R = 4{,}50$ м.

27.4. Частица с зарядом q и массой m движется в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вдоль оси y, по винтовой траектории, у которой шаг равен радиусу. Найти угол α между векторами скорости $\vec{v}$ частицы и индукции $\vec{B}$.



Решение.

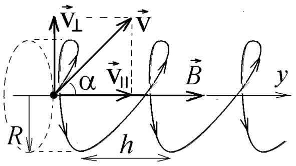
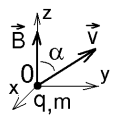


Рис.2.35

Разложим скорость $\vec{v}$ частицы на две составляющие $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_{||}$. Со скоростью $v_\perp$, перпендикулярной к направлению $\vec{B}$, частица будет вращаться по кругу радиуса $R = mv_\perp / qB$ вокруг линий $\vec{B}$. А так как скорость $\vec{v}_{||}$ параллельна $\vec{B}$, то $\vec{F} = q\left[\vec{v}_{||}, \vec{B}\right] = 0$, и частица движется с постоянной скоростью $v_{||}$ вдоль направления $\vec{B}$.

Сумма двух движений – винтовая линия (рис.2.35). Так как $v_\perp = v\sin\alpha$, $v_{||} = v\cos\alpha$, то радиус траектории $R = mv\sin\alpha / qB$, а её шаг h - это расстояние, которое частица пролетает со скоростью $v_{||}$ за один период обращения по окружности: $h = v_{||}T = 2\pi m \cdot v\cos\alpha / qB$. По условию их отношение $R/h = \mathrm{tg}\,\alpha / 2\pi = 1$ и $\alpha = \mathrm{arctg}(2\pi) = 89{,}95^\circ$.

27.5. Частица с удельным зарядом $q/m = 3\cdot 10^8$ Кл/кг ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ и движется в магнитном поле с индукцией B = 0,4 Тл, направленной вдоль оси z. Скорость $\vec{v}$ частицы направлена под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси z. Частица периодически пересекает ось z через равные интервалы Δz = 5 см. Найти величину разности потенциалов $\Delta\varphi$.



Решение.

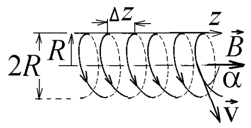
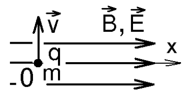


Рис.2.36

Движение частицы происходит по винтовой линии (рис.2.36). Вращаясь вокруг линий $\vec{B}$, она периодически то пересекает ось z, то удаляется от неё на максимальное расстояние $2R$. Интервал Δz – это шаг h, выражение которого получили в предыдущей задаче: $\Delta z = h = \dfrac{2\pi m \cdot v\cos\alpha}{qB}$, где

$v = \sqrt{\dfrac{2q\Delta\varphi}{m}}$ – скорость, приобретаемая частицей после ускорения. Отсюда $\Delta\varphi = \dfrac{q}{2m}\left(\dfrac{\Delta z B}{2\pi\cos\alpha}\right)^2 = 3{,}04$ кВ.

27.6. Вылетев из точки О на оси x с начальной скоростью v_0, направленной перпендикулярно к этой оси, частица с зарядом q = 20 мкКл движется в электрическом и магнитном полях с напряжённостью E = 20 В/м и индукцией B = 0,8 Тл соответственно. Эти поля направлены вдоль оси x (см. рисунок). Чему равна масса m частицы, если совершив N = 8 полных витков траектории, она окажется на расстоянии x = 400 м от точки О?



Решение.

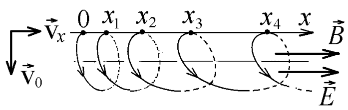
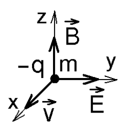


Рис.2.37

Под действием электрического поля частица приобретает постоянное ускорение $a_x = F_{\text{элект}}/m = qE/m$. Поэтому со временем растет проекция её скорости $v_x = a_x t$, параллельная вектору $\vec{B}$, а траектория движения становится винтовой линией с постоянным радиусом $R = mv_0/qB$ и с переменным шагом (рис.2.37). Частица пересекает ось x через каждый период обращения T в точках с координатами $x_n = a_x t^2/2 = a_x (nT)^2/2$. После восьмого оборота её координата $x = \dfrac{a_x (8T)^2}{2} = \; = \dfrac{qE}{m}\cdot 32\left(\dfrac{2\pi m}{qB}\right)^2 = 128\pi^2 \dfrac{mE}{qB^2}$, откуда получаем величину массы

$m = \dfrac{qB^2 x}{128\pi^2 E} = 0{,}203$ мг.

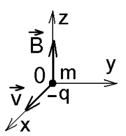
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



27.7. Отрицательно заряженная частица с массой m = 0,4 мг двигалась с постоянной скоростью v = 300 м/с вдоль оси x в электрическом поле с напряженностью E = 600 В/м, направленной вдоль оси y, и в магнитном поле с индукцией B, направленной вдоль оси z. После выключения электрического поля частица продолжила вращение по окружности радиуса R = 2 м. Чему равна величина заряда частицы?

Ответ: 30 мкКл.

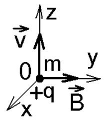
27.8. Ускоренная разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 18 кВ заряженная частица движется по окружности радиуса R = 25 мм в однородном постоянном магнитном поле с индукцией B = 0,3 Тл. Чему равна величина q/m удельного заряда частицы? *Ответ*: $6{,}4\cdot 10^8$ Кл/кг.



27.9. Частица с удельным зарядом $q/m = -4\cdot 10^9$ Кл/кг была ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ и оказалась в магнитном поле с индукцией B = 5 мТл, направленной вдоль оси z. В начальный момент $t_0 = 0$ частица находилась в точке 0 и двигалась со скоростью **v**, направленной вдоль оси x (см. рисунок). В дальнейшем наибольшее удаление частицы от точки 0 равно 20 см. Чему равна величина ускоряющей разности потенциалов $\Delta\varphi$?

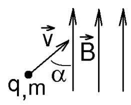
Ответ: 500 В.

27.10. Частица с зарядом q = +5 мкКл движется в однородном магнитном поле, индукция B = 3 Тл которого направлена вдоль оси y. В начальный момент частица находилась в точке 0 и двигалась вдоль оси z (см. рисунок). Через промежуток времени Δt = 0,2 с скорость частицы в первый раз окажется направленной вдоль оси x. Чему равна масса m частицы?



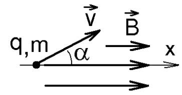
Ответ: m = 0,637 мг.

27.11. Частица с массой m = 0,02 мг была ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 1 кВ и влетела под углом $\alpha = 45^o$ в однородное магнитное поле с индукцией B = 2 Тл, после чего начала двигаться по винтовой траектории с шагом h = 2 м. Найти величину заряда частицы.



Ответ: q = 49,3 мкКл.

27.12. Частица имеет удельный зарядом q/m = 3000 Кл/кг, ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 6 кВ и движется под углом $\alpha = 30^o$ к линиям индукции однородного магнитного поля, направленного вдоль оси x, периодически пересекая ось x через равные промежутки времени. Максимальное удаление частицы от оси x равно 2 м. Найти величину индукции B.



Ответ: B = 1 Тл.

28. Явление электромагнитной индукции и самоиндукции

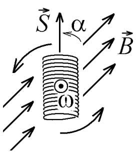


Рис.2.38

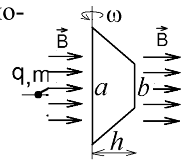
ЭДС электромагнитной индукции возникает в **замкнутом** проводящем контуре, если в нем меняется поток магнитной индукции $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Пусть контур (например, катушка) состоит из N витков любой формы с площадью S каждый и вращается с угловой скоростью ω в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис.2.38). В этом случае $\boxed{\Phi = BNS\cos\alpha}$, где $\alpha = \omega t + \alpha_0$ – угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{S}$ (вектор площади витка $\vec{S}$ имеет величину, равную площади витка, и направлен перпендикулярно к его плоскости).

Возникает ЭДС индукции $\boxed{\varepsilon_{\text{инд}} = -d\Phi/dt}$, причиной появления которой может быть или изменение величины индукции B, или изменение площади S контура, или изменение угла α между векторами $\vec{B}$ и $\vec{S}$.

Если сопротивление проводящего контура равно R, то при этом в нем возникает индукционный ток $\boxed{I_{\text{инд}} = |\varepsilon_{\text{инд}}|/R}$, направленный в такую сторону, чтобы компенсировать изменение потока Φ.

Примеры решения задач:

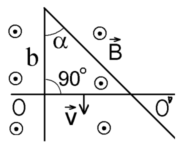
28.1. Замкнутый проводящий контур из тонкого провода с сопротивлением R = 9 Ом имеет вид равнобедренной трапеции с основаниями a = 12 см, b = 6 см и с высотой h = 8 см. Контур вращается в магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл вокруг оси, проходящей через бо̀льшее основание трапеции и перпендикулярной к линиям $\vec{B}$. Найти величину угловой скорости вращения ω, если максимальная величина индукционного тока в контуре $I_{\max}$ = 4 мА.



Решение.

Контур состоит из одного витка с площадью (площадь трапеции) $S = \dfrac{(a+b)h}{2} = 72$ см^2. При вращении в витке возникает ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}} = -\dfrac{d(BS\cos\omega t)}{dt} = BS\omega\sin\omega t$. Индукционный ток $I_{\text{инд}} = \dfrac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R} = \dfrac{BS\omega}{R}\sin\omega t$ меняется по гармоническому закону (такая система будет моделью генератора переменного тока). Его амплитуда $I_{\max} = BS\omega/R$, откуда $\omega = I_{\max}R/BS = 25$ рад/с.

28.2. Замкнутый проводящий контур образован двумя прямыми проводниками, согнутыми под углом $\alpha = 45^o$ и проводником-перемычкой, скользящим со скоростью v = 0,8 м/с (см. рисунок). Перпендикулярно к его плоскости создано магнитное поле. Единица длины каждого из проводников, образующих прямоугольный треугольник, имеет сопротивление R_1 = 2 Ом/м. Чему равна величина индукции магнитного поля B, если в контуре создаётся индукционный ток I = 0,2 А?

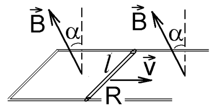


Решение.

В этой задаче меняется площадь $S = b^2/2$ равнобедренного прямоугольного треугольника, так как меняется его катет $b = b_0 + \text{v}t$. Одновременно меняется поток $\Phi = BS\cdot\cos 0^o$ (вектор $\vec{S}$ параллелен вектору $\vec{B}$). Величина индукционного тока $I = \left|\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi}{dt}\right| = \dfrac{B}{R}\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{B}{R}b\dfrac{db}{dt} = \dfrac{B}{R}b\text{v}$.

Сумма всех сторон треугольника равна $b + b + \sqrt{2}b$, и его сопротивление $R = R_1\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)b$ меняется вместе с катетом b. Подставляя эту величину в формулу для I, находим $B = IR_1\left(2+\sqrt{2}\right)/\text{v} = 1{,}71$ Тл.

28.3. Угол между линиями индукции магнитного поля B = 0,2 Тл и нормалью к плоскости не имеющей сопротивления проводящей П-образной рамки равен $\alpha = 30^o$. По рамке без трения со скоростью v = 9 м/с скользит проводящая перемычка с сопротивлением R = 20 Ом. В ней возникает индукционный ток I =60 мА. Найти длину перемычки l, а также величину силы, с которой тянут перемычку.



Решение.

При движении перемычки меняется площадь $S = l\left(a + \mathrm{v}t\right)$ проводящего контура, заштрихованная на рис.2.39. Меняется поток магнитной индукции $\Phi = BS\cos\alpha$ и возникает ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}} = \left|-d\Phi/dt\right| = B\cos\alpha \cdot dS/dt = B\cos\alpha \cdot l\mathrm{v}$.

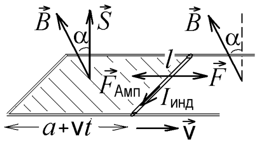
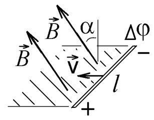


Рис.2.39

Совет: *Помните: если линии индукции $\vec{B}$ магнитного поля составляют угол α с нормалью к плоскости движения проводника с поперечным размером l, то на его краях а образуется разность потенциалов, которая будет причиной появления ЭДС индукции* $\boxed{\Delta\varphi = \varepsilon_{\text{инд}} = Bl\mathrm{v}\cos\alpha}$.



Величина индукционного тока $I_{\text{инд}} = \varepsilon_{\text{инд}}/R = Bl\mathrm{v}\cos\alpha/R$. Отсюда $l = IR/B\mathrm{v}\cos\alpha = 0{,}770$ м.

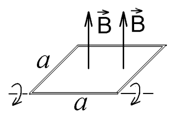
Индукционный ток направлен так, чтобы возникающая сила Ампера $\vec{F}_{\text{Амп}} = I_{\text{инд}}\left[\vec{l}, \vec{B}\right]$ препятствовала изменению потока Φ и тормозила перемычку (рис.1.39). Чтобы перемычка двигалась с постоянной скоростью, её надо тянуть с силой $F = F_{\text{Амп}} = I_{\text{инд}} lB = B^2 l^2 \mathrm{v}\cos\alpha/R = 9{,}24$ мН.

Индукционный ток связан с величиной электрического заряда *q*, протекающего по замкнутому проводящему контуру при изменении магнитного потока Φ в нем: $I_{\text{инд}} = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi}{dt}$. Интегрируя получившееся уравнение $\int dq = -\dfrac{1}{R}\int d\Phi$, находим $\boxed{q = \dfrac{1}{R}\left(\Phi_{\text{начал}} - \Phi_{\text{конечн}}\right)}$.

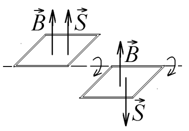
Протекший заряд пропорционален разности начального и конечного значения магнитного потока.

Примеры решения задач:

28.4. Вначале замкнутая проводящая рамка, сделанная в виде квадрата из четырёх одинаковых тонких проводников с сопротивлением R = 3 Ом и длиной a = = 15 см каждый, располагалась в магнитном поле так, что линии его индукции $\vec{B}$ были перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол 180° вокруг одной из её сторон, по рамке протёк заряд q = 6 мКл. Найти величину индукции магнитного поля B.

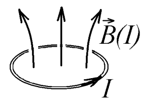


Решение.



До поворота вектор площади $\vec{S}$ был параллелен вектору $\vec{B}$, и поток магнитной индукции был равен $\Phi_{\text{начал}} = Ba^2\cos 0^{\circ}$. После поворота на 180° вектор $\vec{S}$ поменял направление, и конечный поток $\Phi_{\text{конечн}} = Ba^2\cos 180^{\circ}$. Суммарное сопротивление всех проводников равно 4*R*. Подстановка в формулу для протекшего заряда дает $q = 2Ba^2/4R$, откуда $B = 2qR/a^2 = 1{,}6$ Тл.

Текущий по замкнутому проводящему контуру ток *I* создает магнитное поле, индукция которого пропорциональна току: $B \sim I$. Поэтому и поток магнитной индукции будет пропорционален току: $\Phi = \int \vec{B}d\vec{S} \sim I$ или $\boxed{\Phi = LI}$. Коэффициент пропорциональности L называют коэффициентом индуктивности.



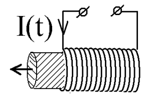
При изменении тока со временем меняется созданный им поток Φ и возникает ЭДС самоиндукции

$$\boxed{\varepsilon_{\text{самоинд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(LI\right)}.$$

Совет: *Обычно эту формулу записывают в случае $L = \text{const}$. Но причиной появления $\varepsilon_{\text{самоинд}}$ может оказаться меняющаяся со временем величина индуктивности L.*

Примеры решения задач:

28.5. Ферромагнитный сердечник извлекают из катушки таким образом, что её индуктивность уменьшается со временем t по закону $L(t) = \alpha/t$, где α = 4 Гн·с. При этом ток, текущий по катушке, возрастает со временем: $I(t) = \beta \cdot t^3$, где β = 3 А/с³. Найти величину индуктивности катушки в тот момент времени, когда возникающая в ней ЭДС самоиндукции ε = 8 В.

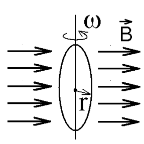


Решение.

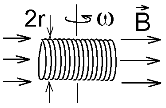
Подставляем приведенные в условии зависимости в формулу $\varepsilon = \left|-\dfrac{d}{dt}\left(LI\right)\right| = \alpha\beta\dfrac{d}{dt}\left(t^2\right) = 2\alpha\beta t$. Указанная величина ЭДС наблюдается в момент времени $t = \dfrac{\varepsilon}{2\alpha\beta}$. В этот момент $L = \dfrac{\alpha}{t} = \dfrac{2\alpha^2\beta}{\varepsilon} = 12$ Гн.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

28.6. Виток из тонкого провода с радиусом r = 5 см вращается с угловой скоростью ω = 20 рад/с в магнитном поле с индукцией B = 2 Тл. Чему равна величина сопротивления R витка, если ось вращения перпендикулярна к линиям индукции, а в витке создаётся индукционный ток с максимальной величиной I_{max} = 4 мА?

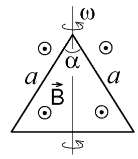


Ответ: 78,5 Ом.



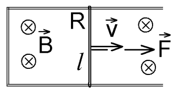
28.7. Короткозамкнутая катушка из N = 20 витков вращается с угловой скоростью ω = 15 рад/с в магнитном поле с индукцией B = 4 мТл. Ось вращения перпендикулярна как к линиям индукции, так и к оси катушки. Чему равен радиус витков катушки, если максимальная величина ЭДС электромагнитной индукции в ней ε_{max} = 4 мВ?

Ответ: 3,26 см.



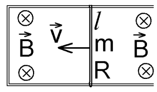
28.8. В магнитном поле с индукцией B = 0,25 Тл вращается замкнутый проводящий контур с сопротивлением R = 6 Ом имеющий вид равнобедренного треугольника со стороной a = 8 см и с углом α = 30° (см. рисунок). Ось вращения совпадает с биссектрисой угла α и перпендикулярна к линиям индукции $\vec{B}$. Индукционный ток в контуре имеет амплитуду I_{max} = 5 мА. Найти величину угловой скорости вращения ω.

Ответ: 75 рад/с.



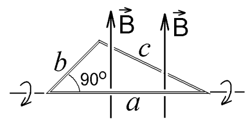
28.9. Линии индукции магнитного поля с величиной B = 2 Тл перпендикулярны плоскости П-образной проводящей рамки, не имеющей сопротивления. По рамке с постоянной скоростью без трения скользит проводящая перемычка длины l = 60 см с сопротивлением R = 8 Ом. Для этого перемычку тянут с силой F = 0,9 Н. Чему равна скорость перемычки?

Ответ: 5 м/с.



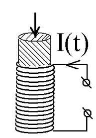
28.10. Магнитное поле с индукцией B = 1,5 Тл приложено к П-образной проводящей рамке, не имеющей сопротивления. Линии индукции перпендикулярны к плоскости рамки. По рамке без трения скользит проводящая перемычка длины l = 40 см с сопротивлением R = 15 Ом. Чему равна масса m перемычки, если в тот момент, когда её скорость равна v = 3 м/с, она движется с ускорением a = 4 м/с^2?

Ответ: 18 г.



28.11. В магнитное поле с индукцией B = 0,4 Тл поместили рамку из тонкого провода с сопротивлением R = 18 Ом, имеющую вид прямоугольного треугольника с катетом b = 15 см. Вначале линии индукции перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол α = 60° вокруг оси, проходящей через второй катет a, по рамке протёк заряд q = 0,3 мКл. Чему равна длина гипотенузы c треугольника?

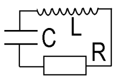
Ответ: 39 см.



28.12. Сердечник вдвигают внутрь катушки индуктивности таким образом, что её индуктивность возрастает со временем t по закону $L(t) = \alpha\cdot t$. При этом ток, текущий по катушке, убывает со временем: $I(t) = \beta/t^3$, где β = = 16 А·с^3. Найти величину постоянной α, если в момент времени t = 2 с величина·ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке, была равна ε = 6 В.

Ответ: 1,5 Гн/с.

29. Собственные электрические колебания



Электрический колебательный контур – это замкнутая цепь, которая содержит конденсатор ёмкости C и катушку с индуктивностью L. Такая цепь может иметь сопротивление R. В таком случае колебания, например, заряда q на конденсаторе будут затухающими: $\boxed{q(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha)}$ (рис.2.40,а). Их амплитуда $Ae^{-\beta t}$ экспоненциально уменьшается со временем t. Циклическая частота собственных затухающих колебаний имеет вид $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$, где $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$ – циклическая частота незатухающих колебаний (возникающих при $R = 0$), $\boxed{\beta = R/2L}$ – коэффициент затухания колебаний. Период собственных затухающих колебаний $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\Big/\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}$ увеличивается с ростом сопротивления R, и становится бесконечным при критическом сопротивлении $\boxed{R_{кр} = 2\sqrt{L/C}}$, при котором $\omega \to 0$. При $R \geq R_{кр}$ колебания не наблюдаются (рис.2.40,б).

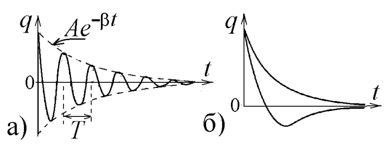
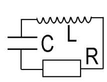


Рис.2.40

Скорость затухания колебаний характеризуют величиной логарифмического декремента затухания колебаний θ – это логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени t к амплитуде через период:

$\theta = \ln\left(Ae^{-\beta t}\Big/Ae^{-\beta(t+T)}\right) = \ln\left(e^{\beta T}\right)$, т.е. $\boxed{\theta = \beta T}$.

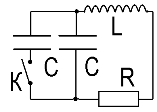
Примеры решения задач:



29.1. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре меняется со временем t по закону $U_C = U_0\cdot\exp(-at)\cos(bt)$, где U_0 = const; $a = 10^4$ с$^{-1}$; $b = 3\cdot10^4$ рад/с. Ёмкость конденсатора C = 4 мкФ. Найти сопротивление R контура.

Решение.

Падение напряжения на конденсаторе $U_C = q/C$ изменяется со временем по тому же приведенному выше закону, что и заряд q на конденсаторе. Поэтому $a=\beta=\dfrac{R}{2L}$, $b=\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-a^2}$. Отсюда $L=\dfrac{1}{C\left(a^2+b^2\right)}$, и $R=2La=2a\big/C(a^2+b^2)=5$ Ом .



29.2. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. Во сколько раз уменьшился при этом период собственных электрических колебаний? L= 100 Гн; C= 50 мкФ; R= 1 кОм.

Решение.

Помните правила вычисления суммарной ёмкости (или суммарного сопротивления) двух конденсаторов (или резисторов), соединенных последовательно или параллельно (рис.2.41):

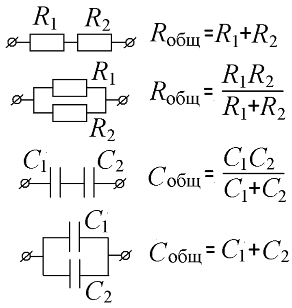
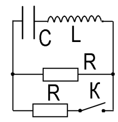


Рис.2.41

При разомкнутом ключе в цепь был подключен один конденсатор с ёмкостью $C_{\mathrm{I}}=C$. После замыкания ключа подключены два параллельно соединенных конденсатора с общей ёмкостью $C_{\mathrm{II}}=C+C=2C$. Подставляя формулу для периода колебаний, находим, что он уменьшился в $\dfrac{T_{\mathrm{I}}}{T_{\mathrm{II}}}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC_{\mathrm{I}}}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}\Bigg/\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC_{\mathrm{II}}}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC_{\mathrm{II}}}-\dfrac{R^2}{4L^2}\right)\Bigg/\left(\dfrac{1}{LC_{\mathrm{I}}}-\dfrac{R^2}{4L^2}\right)}$ раз.

Чтобы не запутаться с приставками и степенями при подстановке числовых данных, делайте сложные вычисления по частям, находя отдельные слагаемые в системе СИ и только потом подставляя их в сложную формулу.

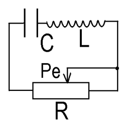
$\dfrac{1}{LC_{\mathrm{I}}}=\dfrac{1}{100\cdot 50\cdot 10^{-6}}=200$ с$^{-1}$; $\dfrac{1}{LC_{\mathrm{II}}}=100$ с$^{-1}$; $\dfrac{R^2}{4L^2}=\left(\dfrac{10^3}{2\cdot 100}\right)^2=25$ с$^{-1}$. Теперь нетрудно найти $\dfrac{T_{\mathrm{I}}}{T_{\mathrm{II}}}=\sqrt{\dfrac{200-25}{100-25}}=1{,}53$ раз.



29.3. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний увеличился в два раза. Чему равна индуктивность L контура? C= 0,8 мкФ; R= 5 кОм.

Решение.

Сопротивление контура после замыкания ключа равно $\dfrac{R\cdot R}{R+R}=\dfrac{R}{2}$. Логарифмический декремент был равен $\theta_1=\beta_1T_1=2\pi\dfrac{R}{2L}\Bigg/\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}$. После изменения сопротивления $\theta_2=\beta_2T_2=2\pi\dfrac{R/2}{2L}\Bigg/\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{(R/2)^2}{4L^2}}$.Подставив эти выражения в отношение $\theta_2/\theta_1=2$ и возводя в квадрат, чтобы избавиться от корня, получим $\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}=\dfrac{16}{LC}-\dfrac{R^2}{L^2}$, откуда $L=R^2C/20=1$ Гн .

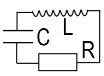


29.4. Движок реостата “Ре” перемещают слева направо, увеличивая сопротивление R. При нулевом сопротивлении, R=R_1 = 0 Ом, циклическая частота собственных электрических колебаний в контуре была равна ω_1. При сопротивлении R=R_2 = 15 кОм частота колебаний уменьшилась в два раза: $\omega_2 = \omega_1/2$. При какой величине сопротивления реостата R_3 колебания прекратятся?

Решение.

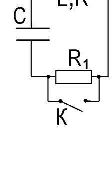
При $R=0$ циклическая частота незатухающих колебаний равна $\omega_1=\omega_0=1\big/\sqrt{LC}$. При ненулевой величине сопротивления $R=R_2$ частота $\omega_2=\sqrt{\omega_0^2-\beta_2^2}=\sqrt{\omega_1^2-\beta_2^2}=\omega_1/2$. Возводя в квадрат обе части последнего равенства, находим $\omega_1^2-\beta_2^2=\dfrac{\omega_1^2}{4}$, откуда получаем $\beta_2=\dfrac{R_2}{2L}=\dfrac{\sqrt{3}\omega_1}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{LC}}$ и $\sqrt{\dfrac{L}{C}}=\dfrac{R_2}{\sqrt{3}}$. Колебания прекращаются, когда $\omega=\beta$ и сопротивление достигает критической величины $R_3=R_{\text{кр}}=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Поэтому $R_3=\dfrac{2R_2}{\sqrt{3}}=17{,}3$ кОм .

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

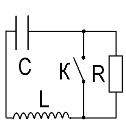


29.5. В колебательном контуре заряд конденсатора меняется со временем t по закону q=q_0·exp(-bt) sin(at), где q_0, a, b – постоянные. Найти величину отношения b/a, если R = 2 кОм; L = 30 Гн; C = 6 мкФ.

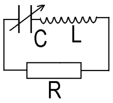
Ответ: 0,5.



29.6. В показанном на рисунке контуре замыкают ключ К, закорачивая сопротивление R_1. Во сколько раз уменьшится при этом период собственных электрических колебаний? Соленоид в контуре имеет индуктивность L= 500 Гн и активное сопротивление R= 10 кОм; C= 4 мкФ; R_1= 10 кОм. *Ответ*: уменьшится в 2 раза.

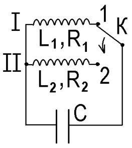


29.7. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом период собственных электрических колебаний уменьшился в полтора раза. Чему равна ёмкость C контура, если L= 27 Гн; R= 2 кОм? *Ответ*: 15 мкФ.

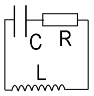


29.8. В цепь колебательного контура включен резистор с сопротивлением R = 1,5 кОм, катушка с индуктивностью L и конденсатор с переменной ёмкостью C. Если величину ёмкости уменьшить от величины C_1 = 18 мкФ до величины C_2 = 4 мкФ, то циклическая частота собственных затухающих колебаний в контуре увеличивается в n = 3 раза. Чему равна индуктивность L катушки?

Ответ: 18 Гн.

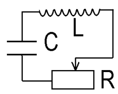


29.9. Ключом К в колебательный контур с ёмкостью C= 4 мкФ включается или соленоид I, или соленоид II с одинаковыми активными сопротивлениями R_1= R_2= R и с индуктивностями L_1=3 Гн и L_2=3L_1 соответственно. При этом частота собственных электрических колебаний в контуре не меняется. Чему равна величина сопротивления R? *Ответ*: 1,5 кОм.



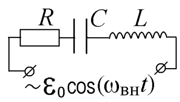
29.10. Логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний в контуре, изображённом на рисунке, θ = 2. Чему равна ёмкость C контура, еслиL= 44 Гн; R= 2 кОм?

Ответ: 4,05 мкФ.



29.11. Собственные электрические колебания в контуре прекращаются при увеличении сопротивления реостата до значения R_0. Чему равен логарифмический декремент затухания θ колебаний при вдвое меньшем сопротивлении $R = R_0/2$? *Ответ*: 3,63.

30. Вынужденные электрические колебания



Вынужденные колебания возникают, если в контур включена внешняя ЭДС с амплитудой ε_0, меняющаяся, например, по гармоническому закону с циклической частотой $\omega_{вн}$.

Величины заряда на конденсаторе и тока в цепи будут меняться с той же частотой $\omega_{вн}$. Амплитуды их колебаний постоянны во времени, но зависят от частоты внешней ЭДС:

амплитуда заряда $\boxed{q_0(\omega_{вн}) = \dfrac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\omega_{вн}^2-\omega_0^2\right)^2+4\beta^2\omega_{вн}^2}}}$; амплитуда тока $\boxed{I_0(\omega_{вн}) = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega_{вн}C}-\omega_{вн}L\right)^2+R^2}}}$.

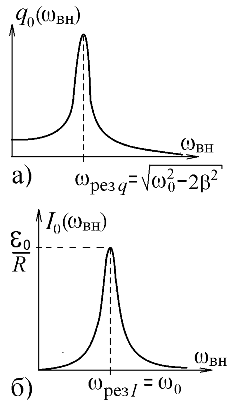


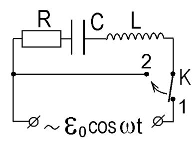
Рис.2.42

Графики такой зависимости приведены на рис.2.42.

Наблюдается **резонанс** – резкое увеличение амплитуды колебаний, когда частота внешней ЭДС сравнивается с резонансной частотой $\omega_{рез}$. Резонансная частота для заряда или для напряжения на конденсаторе $\boxed{\omega_{рез\,q} = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} = \sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{2L^2}}}$.

Резонансная частота для тока в цепи $\boxed{\omega_{рез\,I} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. При этой частоте амплитуда тока достигает максимального значения, равного $\boxed{I_{0\,max} = \varepsilon_0/R}$ (рис.2.42,б).

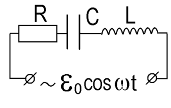
Примеры решения задач:



30.1. Если ключ К находится в положении “1” и подключает к электрическому колебательному контуру источник ЭДС с амплитудой ε_0 и циклической частотой ω, то при частоте ω = ω_1 в наблюдается резонанс вынужденных колебаний тока, а при частоте ω = ω_2 - резонанс вынужденных колебаний напряжения на обкладках конденсатора. Когда ключ К переключают в положение “2”, в контуре возникают собственные затухающие колебания с циклической частотой ω_3. Найти отношение частот ω_1/ω_3, если известно отношение частот $\omega_3/\omega_2 = 2$.

Решение.

Резонансная частота тока в цепи $\omega_1 = \omega_0$; резонансная частота напряжения $U = q/C$ на конденсаторе $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$; частота собственных затухающих колебаний при положении ключа “2” $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$. По условию $\left(\dfrac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = \dfrac{\omega_0^2-\beta^2}{\omega_0^2-2\beta^2} = 2^2 = 4$. Находим отсюда, что $\beta^2 = \dfrac{3}{7}\omega_0^2$. Тогда $\dfrac{\omega_1}{\omega_3} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-3/7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}32$.



30.2. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС ω = ω_1=4000 рад/с, а при частоте ω = ω_2=5000 рад/с амплитуда тока уменьшается в два раза. Чему равна ёмкость C контура, если R = 15 кОм ?

Решение.

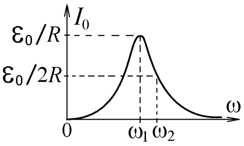


Рис.2.43

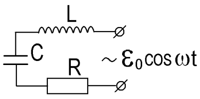
Из графика зависимости амплитуды тока от частоты внешней ЭДС (рис.2.43) видно, что при $\omega_1 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ амплитуда тока максимальна и равна $I_{0\max} = \varepsilon_0/R$, где ε_0 – амплитуда ЭДС. При частоте ω_2 по условию $I_0(\omega_2) = \varepsilon_0 \Big/ \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 + R^2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{R}$.

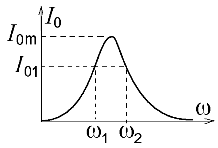
Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $\left(\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 = 3R^2$.

Совет: *Помните, что извлекая квадратный корень, Вы получаете два значения: $\sqrt{x^2} = \pm x$. Выбрав неверный знак, можно получить в ответе отрицательную величину сопротивления R, ёмкости C или индуктивности L.*

Поэтому, извлекая корень, учтем оба знака: $\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L = \pm\sqrt{3}R$. Индуктивность L подставим из записанной выше формулы $L = 1/\left(\omega_1^2 C\right)$, и находим $C = \pm\frac{1}{\sqrt{3}R}\left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1^2}\right)$. После подстановки числовых данных видно, что правильным будет нижний знак, дающий положительное значение $C = 4{,}33$ нФ.

30.3. На рисунке представлен график зависимости амплитуды тока I_0 от циклической частоты ω внешней ЭДС. Эта амплитуда имеет одинаковую величину $I_{01} = 3I_{0m}/5$ при двух значениях ω_1 и ω_2 частоты, где I_{0m} – максимальное возможное значение амплитуды тока при вынужденных колебаниях. Найти величину разности частот $\omega_2 - \omega_1$. Параметры контура: $\beta = R/2L = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 9000$ с$^{-1}$.





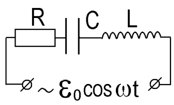
Решение.

Так как $I_{0m} = \frac{\varepsilon_0}{R}$, то амплитуда тока $I_{01} = \varepsilon_0 \Big/ \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} = \frac{3}{5}\frac{\varepsilon_0}{R}$. Возводя в квадрат обе части этого равенства, получим $\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 = \frac{16}{9}R^2$, откуда $\frac{1}{\omega C} - \omega L = \pm\frac{4}{3}R$. Последнее уравнение приводится к виду

$\omega^2 \pm \frac{4}{3}\frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0$ или, согласно условию, $\omega^2 \pm \frac{8}{3}\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0$. Такое квадратное уравнение имеет два положительных корня, если взять нижний знак: $\omega_1 = \omega_0/3$ и $\omega_2 = 3\omega_0$. Поэтому $\omega_2 - \omega_1 = 8\omega_0/3 = 24000$ с$^{-1}$.

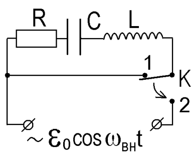
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

30.4. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1 = 2000$ с$^{-1}$, а максимум амплитуды тока – при $\omega = \omega_2 = 3000$ с$^{-1}$. Чему равно активное сопротивление R контура, если $L = 2$ Гн?



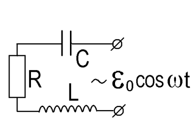
Ответ: 6,324 кОм.

30. 5. Вначале ключ К была замкнут в положении “1”, и циклическая частота собственных электрических колебаний в образовавшемся контуре имела величину $\omega_1 = 4000$ с$^{-1}$. Затем ключ К переключили в положение “2” (см. рисунок), подключая внешнюю ЭДС. При какой циклической частоте $\omega_{вн}$ внешней ЭДС амплитуда тока в цепи будет максимальной, если амплитуда напряжения на конденсаторе максимальна при $\omega_{вн} = \omega_2 = 3000$ с$^{-1}$?



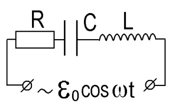
Ответ: 4796 с$^{-1}$.

30.6. В колебательный контур включен источник внешней ЭДС с амплитудой ε_0 и с циклической частотой ω. Наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе наблюдается при $\omega = \omega_1 = 1000$ с$^{-1}$. При каком значении частоты ω достигается наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний тока в цепи? Активное сопротивление контура $R = 8$ кОм, его индуктивность $L = 2$ Гн.



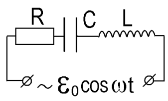
Ответ: 3000 с$^{-1}$.

30.7. Амплитуда тока в электрическом колебательном контуре оказывается одинаковой при двух значениях циклической частоты внешней ЭДС: $\omega_1 = 3000$ рад/с и $\omega_2 = 4000$ рад/с. Чему равна ёмкость C контура, если его индуктивность $L = 1$ Гн ?



Ответ: 83,3 нФ.

30.8. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1 = 2000$ рад/с, а при частоте $\omega = \omega_2 = 3000$ рад/с амплитуда тока уменьшается в три раза. Чему равно сопротивление R контура, если $C = 2$ мкФ ?



Ответ: 49,1 Ом.